Collège des Sœurs des Saints-Cœurs
Bickfaya

Année Académique 2022-2023
Matière : Mathématiques
Classe : SV
Date : 4/11/2022
Durée : 100mn

Calculatrice non programmable et non graphique, autorisée.
Barème sur 20.

Deuxième contrôle .

Exercice I- (6pts)

Dans le tableau suivant, une seule réponse proposée à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N^0	*Questions*	*Réponses*		
		A	*B*	*C*
1	Le domaine de définition de la fonction fof tel que $f(x) = \sqrt{1-x}$ est :	$x > 1$	$x < 1$	$0 \leq x \leq 1$
2	F est la fonction définie sur R par $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$ est :	Non monotone sur R	Croissante sur R	Décroissante sur R
3	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} =$	$\frac{3}{4}$	-2	1
4	f et g sont deux fonctions dérivables sur R et l'on a $f(x) = x^2+1$ et $g'(5) = 3$ alors $(gof)'(-2) =$	15	-12	1
5	$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-1}$ est une fonction de courbe (C) L'équation de l'asymptote oblique à (C) en $+\infty$ est :	$y = x$	$y = 2x$	$y = 2x - 1$
6	$\int_1^2 t\sqrt{-t+3}\ dt =$	$\frac{12\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$	$\frac{6\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{6}{5}$

Exercice II- (7pts)

A-Calculer les intégrales ci-dessous

$I = \int \left(\frac{3}{\sqrt{2}}x^3 - \sqrt{3}x + 1\right) dx$

$J = \int \left(\frac{-1}{2}x^2 - x\sqrt[3]{x^4}\right) dx$

$K = \int_{-2}^{2} (-2z^5 + 6z^{11} + z)^{199} dz$

$L = \int \frac{x+1}{(x^2+2x-5)^2}\ dx$

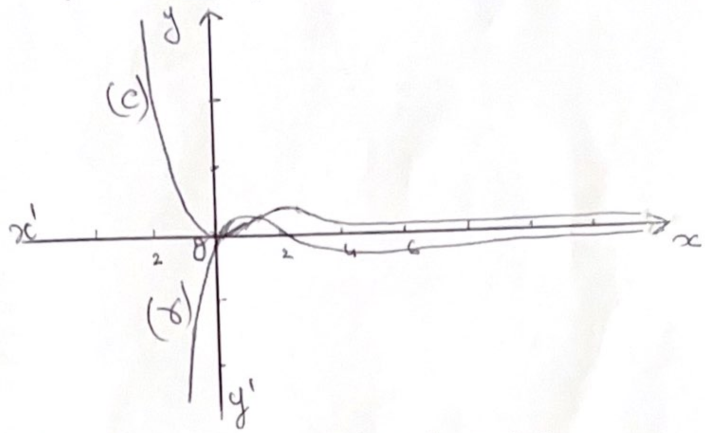
B-Dans un repère orthonormé d'axes x'Ox , y'Oy, on considère (D) le domaine limité par les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) d'équations respectives $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ et $x = 2$.

1) Calculer l'aire du domaine (D) .

2) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe $x'Ox$.

Exercice III- (3pts)

Les deux courbes (C) et (C') données ci-dessous sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$,$y'Oy$ d'une fonction f et de sa dérivée f'.



1) Déterminer parmi ces deux courbes celle qui représente f et de celle qui représente f'.

2) Démontrer que la courbe représentative de f admet deux points d'inflexion I et J.

Exercice IV- (4pts)

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$,$y'Oy$ d'une fonction f définie et continue sur R.

$x'Ox$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

(C) admet en A(0,1) une tangente horizontale et coupe l'axe $x'Ox$ en B(-1,0).

(C) coupe la droite (D) d'équation $y = x$ en deux points dont l'un E est d'abscisse $\propto$ tel que $\propto < 0$

1) Reproduire la partie (C_1) de la courbe (C) correspondante à $x \in]-\infty; 0]$.

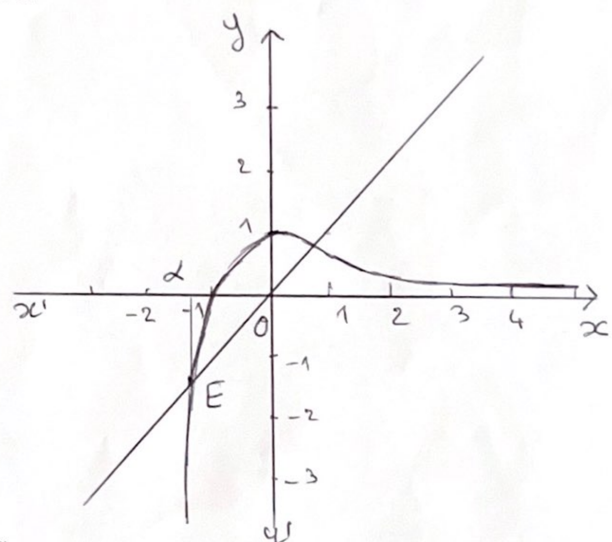
2) Démontrer que f admet sur $]-\infty; 0]$ une fonction réciproque g, et donner son domaine de définition.

3) Résoudre l'inéquation $g(x) > \propto$.

4) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') représentative de g .

5) a) Calculer $g'(0)$ sachant que $f'(-1) = \frac{27}{10}$.

b) Vérifier que l'équation de la tangente à (C') au point d'abscisse 0 est : $10x - 27y - 27 = 0$.



BON TRAVAIL

SSCC Bikfaya — Mathématiques — Classe SV 2022/2023 — Deuxième contrôle

Exercice 1

1) $x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f(f(x))$ $\quad D_f : 1-x \geq 0$

$-x \geq -1 ; x \leq 1$

$x \in D_f$ $\quad f(x) \in D_f$

$x \leq 1$ $\quad f(x) \leq 1 \rightarrow \sqrt{1-x} \leq 1$ (1)

$\rightarrow 1-x \leq 1$

$-x \leq 0 ; x \geq 0$ or $x \leq 1$

alors $0 \leq x \leq 1$ (C)

2) $F'(x) = \left(\int_1^{x^2} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt\right)' = \frac{1}{((x^2)^2+1)^2} \times (2x)$

$F'(x) = \frac{2x}{(x^4+1)^2}$ or $x \in \mathbb{R}$ donc $F'(x)$ change de signe alors $f(x)$ non monotone (A)

(1)

$x \leq 0 \rightarrow F'(x) \geq 0$

et si $x > 0 \rightarrow F'(x) > 0$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = \frac{0}{0}$ F.I R.H

(1)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3+x}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{\frac{2}{2\sqrt{2x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{10-x}}} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{4} \times \frac{6}{3} = 1$ (C)

4) $(g \circ f)'(-2) = g'(f(-2)) \times f'(-2) = g'(5) \times -4 = 3 \times -4 = -12$ (B)

(1)

5) $\begin{array}{r|l} 2x^3+1 & x^2-1 \\ -(2x^3-2x) & 2x \\ \hline 2x+1 & \end{array}$ $\quad y = 2x$ A.O. $\quad \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{\infty} \frac{2x+1}{x^2-1} = 0$

(B) (1)

6) $u = t \quad u' = 1$

$v' = (-t+3)^{\frac{1}{2}} \quad v = -\frac{(-t+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}}$ $\quad I = -\frac{2}{3} t (-t+3)^{3/2} + \frac{2}{3}\int (-t+3)^{\frac{3}{2}} dt$

$I = \left[-\frac{2}{3} t (-t+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \times (-1) \times \frac{(-t+3)^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{12\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$ (A)

(1)

Exercice II

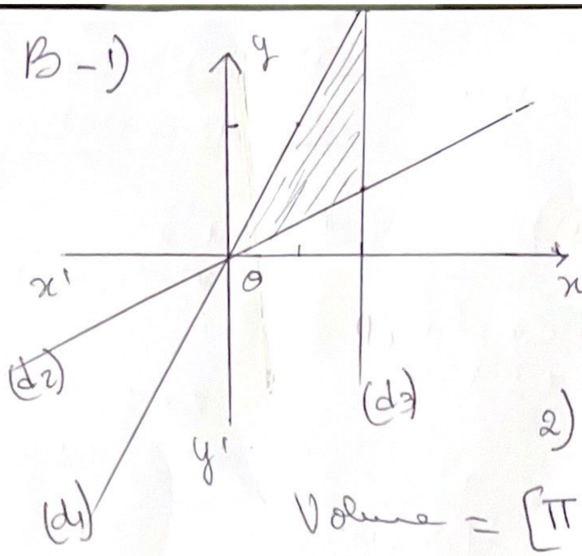
A- $I = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{x^4}{4} - \sqrt{3}\frac{x^2}{2} + x + K$ (1) $\quad J = -\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + K$

(1)

$K = 0$ car $f(z) = (-2z^5 + 6z^{11} + z)^{199}$ fonction impaire (1)

$L = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x-5)^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+2x-5}\right) + K = \frac{-1}{2(x^2+2x-5)} + K$ (1)

B – 1)



(d1) $y = 2x$

x	1	2
y	2	0

(d2) $y = \frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	1

(d3) // (y'y)

1) $\text{Aire } (D) = \int_0^2 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{2}x\right) dx$

$\text{Aire } (D) = \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 3\,u^2$ 1½

2) $\text{Volume} = \int_0^2 \pi y_1^2\,dx - \int_0^2 \pi y_2^2\,dx$

$\text{Volume} = \left[\pi\left(4\frac{x^3}{3}\right) - \pi \cdot \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 10\pi\,u^3$

1½

Exercice III

1) si (C) ⇒ f' alors le signe de f'

x	$-\infty$		0		2	
$f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$
$f(x)$		↘		↗		↘

1½ donc

donc c'est le (C)

2) D'après la courbe de f' on peut retirer le signe de f'' donc

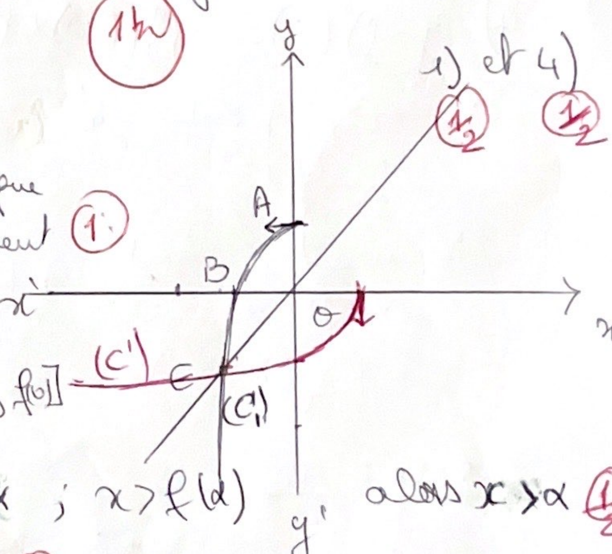
x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↗		↘		↗	

alors f'' s'annule 2 fois en changeant de signe alors f admet deux points d'inflexion I et J.

1½

Exercice IV

1) et 4) ½ ½



2) D'après la représentation de f sur $]-\infty, 0]$ on remarque que f est continue strictement monotone croissante donc elle admet une fonction réciproque g avec $D_g =]\lim_{-\infty} f, f(0)]$ 1

$D_g =]-\infty, 1]$

3) $g(x) > \alpha$ alors $f^{-1}(x) > \alpha$; $x > f(\alpha)$ alors $x > \alpha$ ½

5) a) $g'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{10}{27}$ ½

b) $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$; $y = \frac{10}{27}(x) - 1$ 1

$27y = 10x - 27$; $\boxed{10x - 27y - 27 = 0}$