Collège des Sœurs des Saints-Cœurs
Bickfaya

Année Académique 2022-2023
Matière : Mathématiques.
Classe : SV
Date : Vendredi 3/2/23
Durée : 120mn

Nom et Prénom : ______________________

Toute copie mal rédigée ou mal présentée sera pénalisée.
Calculatrice non programmable et non graphique, autorisée.
Barème sur 40.

Premier Examen.

Je suis plein(e) de ressources et j'ai confiance en moi !Quel que soit l'obstacle en face de moi, je peux tout surmonter !

Exercice I- (10pts)

A.1) Résoudre l'équation : $C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$.
2) La salle de la classe SV contient 20 places. De combien de façons différentes peut-on faire asseoir 8 élèves.
3) Quel est le nombre d'anagrammes du mot ELIANNE ?
4) Une salle de 30 élèves contient 4 filles. Combien peut-on former de comités de 4 élèves dans chacun des cas suivants :
a) 2 au moins des membres sont des filles.
b) Au moins un membre est une fille.

B. Résoudre dans R :
a) $(lnx+1)(e^{-x}-1)=0$
b) $(lnx)^2 - 2lnx < 0$
c) $lnx + \ln(2x+5) \leq ln3$

Exercice II- (6pts)

Le tableau suivant représente la distribution des âges de 50 personnes, 26 hommes et 24 femmes.

Age de années	[20 ; 25 [	[25 ; 30 [	[30 ; 35]
Nombre d'hommes	8	8	10
Nombre de femmes	5	9	10

On choisit au hazard, 3 personnes parmi ces 50 personnes pour former un comité.
1) Quel est le nombre de comités possibles ?
2) Soit les évènements suivants :
M : le comité est formé de trois hommes,
F : le comité est formé de trois femmes.
A : le comité est formé d'au moins un homme.
Quel est le nombre de choix possibles pour réaliser chacun des évènements M, F et A.
3) Si l'on veut avoir 1 homme dont l'âge est supérieur à 30 et 2 femmes dont l'âge de chacune est inférieur strictement à 30, quel sera alors le nombre de choix possibles ?

Exercice III. (12pts)

A. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

3) En déduire que pour tout $x \in R$, $g(x) + 1 \geq 0$.

B. Soit h la fonction définie sur R, par $h(x) = x + (2 + x)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Calculer les limites de h aux bornes de son domaine de définition.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

c) Etudier les positions de (C) et de (d).

2) Vérifier que $h'(x) = g(x) + 1$ et dresser le tableau de variations de h.

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point E d'abscisse -1.

4) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1{,}69 < \alpha < -1{,}68$.

5) Montrer que $g(\propto) = \frac{\propto^2 + \propto}{2 + \propto}$.

6) Tracer (T), (d) et (C).

Exercice IV. (12pts)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $(x) = x^2 + lnx$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (*unité graphique : 2cm*).

1) Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Déduire une asymptote et une direction asymptotique de (C) .

2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Déduire que l'équation : $x^2 + lnx = 0$, admet une solution unique α et que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

c) Dresser alors le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Calculer $f''(x)$. Etudier la concavité de (C) et trouver le point d'inflexion E.

4) Tracer (C) .

5) a) Démontrer que la fonction f admet sur $]0;+\infty[$, une fonction réciproque f^{-1} de courbe (C') dont on déterminera le domaine de définition.

b) Trouver $f^{-1}(0)$ et prouver que le point A d'abscisse 1 est commun à (C) et (C') .

c) Tracer (C') dans le même repère que (C) .

d) Ecrire une équation de la tangente en A à (C') .

6) a) Vérifier qu'une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + x\, lnx$.

b) Soit $S(\propto)$ l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives $x = \propto$ *et* $x = 1$. Calculer $S(\propto)$ en fonction de $\propto$ et en cm^2 .

BON TRAVAIL.

Collège des S.S.C.C.
Bickfaya.

Corrigé du Premier Examen

Maths SV.
3/2/23.

Exercice I.

A- 1) $\frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 3n(n-1)$

$\frac{\cancel{(n-3)!}(n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-3)!}\,6} + \frac{\cancel{(n-2)!}(n-1)n \times 3}{\cancel{(n-2)!}\,2 \times 3} = \frac{3n(n-1)\times 6}{1 \times 6}$ (1)

$n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - 18n(n-1) = 0$; $n(n-1)[n-2+3-18] = 0$

$n(n-1)(n-17) = 0$

$n = 0$ ou $n = 1$ ou $\boxed{n=17}$
inaccept inaccept accept

2) $20\times19\times17\times18\times16\times15\times14\times13$ façons (1)

3) $\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$ anagrammes (1)

4) a) 2F ou 3F ou 4F $\rightarrow$ $C_4^2 \times C_{26}^2 + C_4^3 \times C_{26}^1 + C_4^4 = 2055$ comités (1)

b) $C_{30}^4 - C_{26}^4 = 12455$ comités. (1)

B- a) $\ln x = -1$ ou $e^{-x} - 1 = 0$; $e^{-x} = 1$ (1) $S = \{e^{-1}\}$

$x = e^{-1}$ accept $-x = \ln 1$; $x = 0$ inaccept

b) $\ln x(\ln x - 2) < 0$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x(\ln x-2)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]1, e^2[$ (2)

c) $x > 0$ et $x > \frac{-5}{2}$ donc $x > 0$

$\ln(x)(2x+5) \leq \ln 3$

$2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -3$

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$2x^2+5x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]0, \frac{1}{2}]$ (2)

Exercice II

1) $C_{50}^3 = 19600$ comités. (1)

2) M: $C_{26}^3 = 2600$ comités (1) F: $C_{24}^3 = 2024$ comités. (1)

A: $C_{26}^1 C_{24}^2 + C_{26}^2 C_{24}^1 + C_{26}^3 = 17576$ comités (2)

3) $C_{10}^1 C_{14}^2 = 910$ choix possibles. (1)

Exercice III

A. 1) $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (1)

$\lim\limits_{-\infty} g(x) = -\infty(-\infty) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ (1)

2) $g'(x) = -e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(-1+x+1) = xe^{-x}$ (1)

$x = 0$

$e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

(1)

(1)

3) D'après le tableau de variations de g le minimum de g est -1 alors pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) \geq -1$ / $g(x) + 1 \geq 0$

B. 1) a) $\lim\limits_{-\infty} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ ½

$\lim\limits_{+\infty} h(x) = \lim\limits_{+\infty}\left[x + \dfrac{2+x}{e^{x}}\right] = +\infty + \dfrac{1}{\infty} = +\infty$ ½ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

b) $d = h(x) - y = (2+x)e^{-x}$ ½ $\lim d = 0$ alors $y = x$ A.O. en $+\infty$ ½

c) $d = 0$; $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
d		$-$	0	$+$	

½ pour $x < -2$: (C) en dessous de (d)
pour $x > -2$: (C) au dessus de (d)
pour $x = -2$: (C) et (d) se coupent

2) $h'(x) = 1 + e^{-x} - e^{-x}(2+x) = 1 + e^{-x}(1-2-x)$

$h'(x) = 1 + e^{-x}(-1-x) = g(x) + 1 \to h'(x) > 0$ ½

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

½

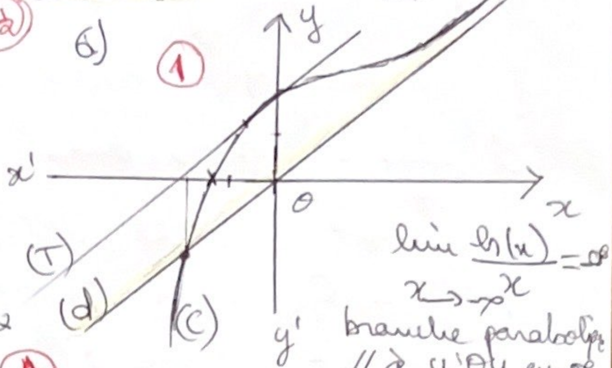
3) $y = h'(-1)(x+1) + h(-1)$: $\boxed{y = x + e}$ (T) ½

4) pour $x \in \mathbb{R}$, h est continue strictement monotone croissante de $-\infty$ à $+\infty$ alors elle passe par le zéro $\to h(x) = 0$ admet une solution unique α. 1

$h(-1{,}69) = -0{,}00996$ / $h(-1{,}68) = 0{,}036$

$h(-1{,}69) \times h(-1{,}68) < 0$

6) 1



$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x} = -\infty$ branche parabolique // à $y'Oy$ en $-\infty$

5) $h(\alpha) = 0$; $\alpha + (2+\alpha)e^{-\alpha} = 0$; $(2+\alpha)e^{-\alpha} = -\alpha$

$e^{-\alpha} = \dfrac{-\alpha}{2+\alpha}$ $g(\alpha) = (-\alpha-1)\left(\dfrac{-\alpha}{2+\alpha}\right) = \dfrac{\alpha^2+\alpha}{2+\alpha}$ 1

Exercice IV

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + \ln 0 = -\infty$ ½ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$ ½

$x = 0$ A.V. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ ½ donc au voisinage de $+\infty$, (C) admet une direction asymptot. // à $y'Oy$.

2) a) $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$ ½

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

½

b) pour $x \in]0, +\infty[$ f continue strict. monotone croissante de $-\infty$ à $+\infty$ ½

$f(0{,}6) = -0{,}15 < 0$
$f(0{,}7) = 0{,}13 > 0$ ½

c)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$ ½ $2x^2 - 1 = 0$; $x^2 = \dfrac{1}{2}$; $x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

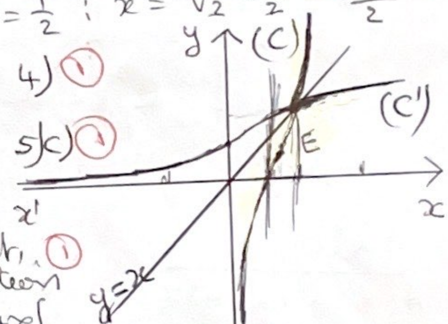
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	‖	concave	point d'inflexion E	convexe

½

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ½
$y = \dfrac{2}{4} + \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{\dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{0{,}153}\right)$

4) 1

5) c) 1



5) a) Pour $x \in]0, +\infty[$, f est continue strictement monotone, croissante donc elle admet une fonction réciproque. $f :]0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$ $D_{f^{-1}} =]-\infty, +\infty[$ 1

b) $f^{-1}(0) = \alpha$. Le point commun à (C) et (C') est celui commun à (C) et $y = x$; $x = 1 \to f(1) = 1^2 + \ln 1 = 1$ 1 $x = 1 \to y = 1 \to A(1,1)$ point commun

d) $y = (f^{-1})'(1)(x-1) + f^{-1}(1)$ $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ 1 $y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 1$

$\boxed{y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}}$

6) a) $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 1 + 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}$

$F'(x) = x^2 - 1 + \ln x + 1 = x^2 + \ln x = f(x)$ 1

b) $S(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} (f(x) - y_{axe})\,dx = [F(x)]_{\alpha}^{1} = \dfrac{1}{3} - 1 + 1\ln 1 - \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha - \alpha\ln\alpha$ 1

$S(\alpha) = \left(-\dfrac{2}{3} - \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha - \alpha\ln\alpha\right) \times 4\ \text{cm}^2$