32 $f(x) = \ell n\,(1 + e^x) - x$

1° **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + x \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \ell n\,(1 + e^x) = 0$.

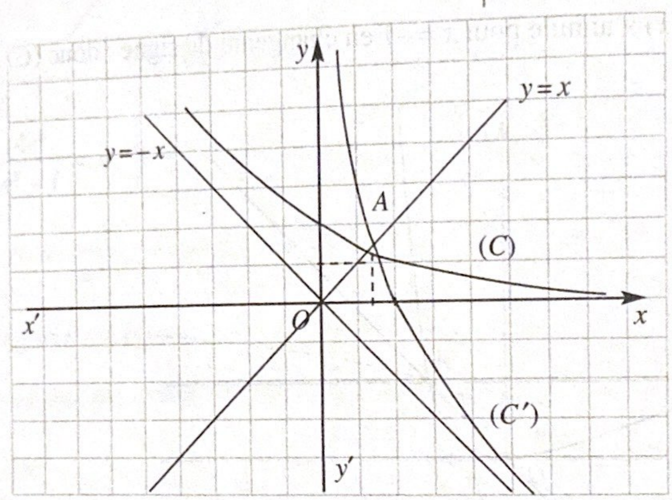
c) $f(x) - y = \ell n\,(1 + e^x) > 0$; (C) est au-dessus de (d) .

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ell n \left(\dfrac{1 + e^x}{e^x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, 1 = 0$.

2° **a)** $f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} - 1 = \dfrac{-1}{1 + e^x} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

b)



3° **a)** f est strictement décroissante .

$g = f^{-1}$ existe dans $]-\infty\,;0[$.

b) figure .

c) $g(x) > \ell n\,(2)$; $f(\ell n\, 2) = \ell n\,(3) - \ell n\, 2 = \ell n \left(\dfrac{3}{2} \right)$

$f\big(g(x)\big) < f(\ell n\, 2)$ car f est décroissante $x < \ell n \left(\dfrac{3}{2} \right)$.

d) Le point de (C') est $(\ell n\, 2\,;0)$; $g'(\ell n\, 2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -2$

$y = -2(x - \ell n\, 2) + 0$

$y = -2x + 2\,\ell n\, 2$

e) $f(x) = \ell n \left(\dfrac{1 + e^x}{e^x} \right) = y$

$\dfrac{1 + e^x}{e^x} = e^y$; $e^x \cdot e^y = 1 + e^x$; $e^x(e^y - 1) = 1$

$e^x = \dfrac{1}{e^y - 1}$; $x = \ell n \left(\dfrac{1}{e^y - 1} \right) = -\,\ell n\,(e^y - 1)$; $e^y - 1 > 0$ car $e^x > 0$

soit $y = -\,\ell n\,(e^x - 1)$ c'est-à-dire $g(x) = -\,\ell n\,(e^x - 1)$; $\dfrac{1}{e^x - 1} > 2$ donne $2e^x < 3$;

$e^x < \dfrac{3}{2}$; $x < \ell n\, \dfrac{3}{2}$.

f) $f(x) = x$: $\ell n\,(1 + e^x) = \ell n\,(e^{2x})$: $e^{2x} - e^x - 1 = 0$; $x = \ell n \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = y$.

33 1° a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x(e^x-4)+3\right] = +\infty$ $y=3$ A. H.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{e^x}{x}(e^x-4)+\dfrac{3}{x}\right] = +\infty$. au voisinage de $+\infty$ la courbe admet une direction asymptotique $//\ y'Oy$

b) $f(x) = 0$, $e^x = 1$ ou $e^x = 3$; $x = 0$ ou $x = \ln 3$. $\to e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$X^2 - 4X + 3 = 0$

2° $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$X_1 = 1 \to e^x = 1 \to x = 0$

$X_2 = 3 \to e^x = 3 \to x = \ln 3$

$f''(x) = 2e^x(e^x - 2) + 2e^x(e^x) = 2e^x(e^x - 2 + e^x) = 2e^x(2e^x - 2)$

3° $f''(x) = 4e^x(e^x - 1)$, $f''(x) > 0$ pour $x > 0$, $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f''(x) = 0$ pour $x = 0$, $f(0) = 0$ donc O est un point d'inflexion de (C) .

4° $y - 0 = f'(0)(x - 0)$ et $f'(0) = -2$, d'où $y = -2x$.

$= 2e^{2x} - 4e^x + 2 = 2(e^{2x} - 2e^x + 1)$

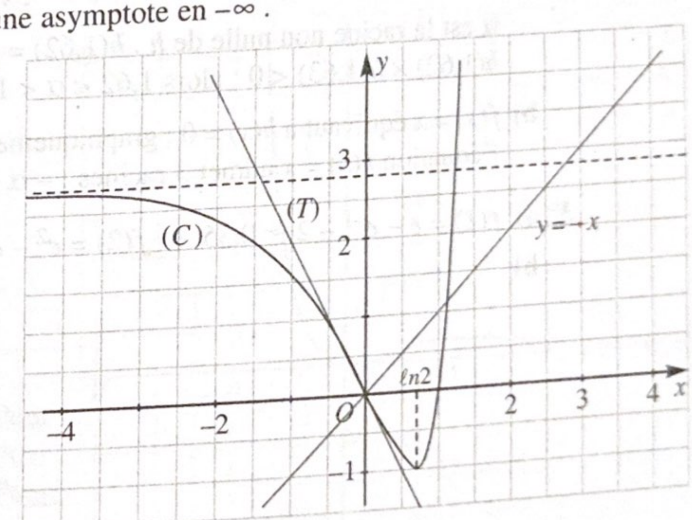
5° a) $h'(x) = f'(x) + 2 = 2(e^x - 1)^2$. $h'(x) \geqslant 0$ pour tout x .

b) $h(x) = f(x) - (-2x)$, h est strictement croissante et $h(0) = 0$ donc pour $x > 0$, $h(x) > 0$ par suite (C) est au-dessus de (T) et pour $x < 0$, $h(x) < 0$ donc (C) est au-dessous de (T) , (C) et (T) se coupent en O .

6° La droite d'équation $y = \ln 3$ est une asymptote en $-\infty$.

$y'y$ est une direction asymptotique en $+\infty$.

car $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$



7° $S = \displaystyle\int_0^{\ln 3} -f(x)\,dx = \left[-\dfrac{1}{2}e^{2x} + 4e^x - 3x\right]_0^{\ln 3} = (4 - 3\ln 3)$ unités d'aire .

8° a) f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\,;+\infty[$, f admet une fonction réciproque f^{-1} .

b) Les courbes des deux fonctions f et f^{-1} se coupent sur la droite d'équation $y = x$. La droite d'équation $y = x$ coupe (C) en un seul point d'abscisse α .

Soit $\psi(x) = f(x) - x$, $\psi(1{,}2) \approx -0{,}4$, $\psi(1{,}3) \approx 0{,}4$ donc $\alpha \in\,]1{,}2\,;1{,}3[$.