15 **1°** $f(0) = \frac{1}{2}$; $f(\ell n\, 2) = 2 + 1 + \frac{3}{2-3} = 0$ ($e^{\ell n 2} = 2$) .

Comme $e^{\ell n \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ alors $f\left(\ell n\, \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24}$.

$-\ell n\, 2 = \ell n\, \frac{1}{2}$ et $e^{-\ell n 2} = \frac{1}{2}$ d'où $f(-\ell n\, 2) = \frac{3}{10}$.

2° $e^x - 3 \neq 0$ donc $x \neq \ell n\, 3$ et $D_f = \mathbb{R} - \{\ell n\, 3\}$.

3° a) $f(x) = 0$ équivaut à $e^x + 1 + \frac{3}{e^x - 3} = 0$, soit $\frac{(e^x)^2 - 2e^x}{e^x - 3} = 0$.

$e^x(e^x - 2) = 0$ et $e^x = 0$ ou $e^x = 2$ or $e^x \neq 0$ donc $x = \ell n\, 2$.

b) $e^x + 1 + \frac{3}{e^x - 3} = -2$ équivaut à $\frac{(e^x)^2 - 6}{e^x - 3} = 0$

$e^{2x} = 6$ et $x = \ell n\left(\sqrt{6}\right)$.

16 1° ...

29 1° a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1 - \dfrac{4}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1 - \dfrac{4}{0^-} = +\infty$

donc l'axe des ordonnées , d'équation $x = 0$, est asymptote à (C) .

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{e^x - 1} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1} - x - 3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-4 - \dfrac{4}{e^x - 1}\right) = -4 + 4 = 0$.

2° Le domaine de définition de f est centré en O .

$$f(-x) + f(x) = -x - 1 - \frac{4}{e^{-x} - 1} + x - 1 - \frac{4}{e^x - 1} = -2 + \frac{4e^x}{e^x - 1} - \frac{4}{e^x - 1}$$

$= -2 + 4 = 2$, d'où $S(0\ ;\ 1)$ est un centre de symétrie de (C) .

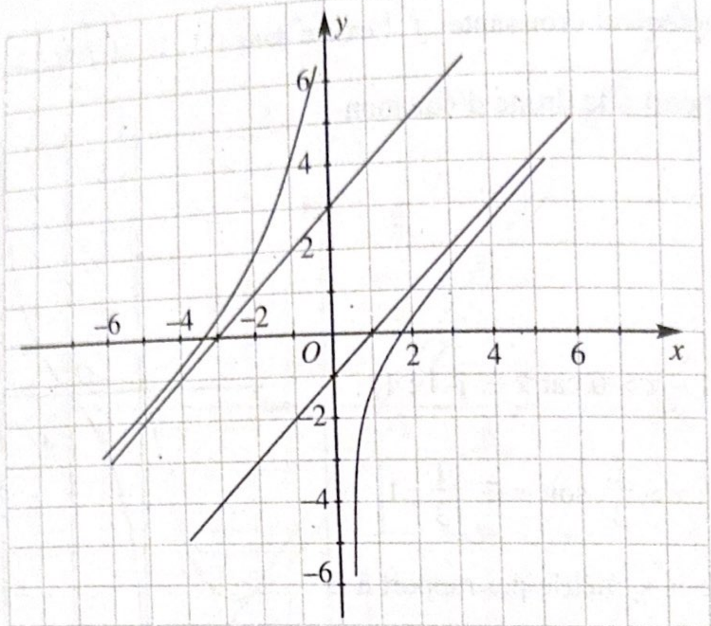
3° a) $f'(x) = 1 + \dfrac{4e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$; l'équation $f(x) = 0$ admet sur cet intervalle une seule racine négative β ; $f(-3{,}2) = -0{,}03 < 0$ et $f(-3{,}1) = 0{,}088 > 0$ donc $-3{,}2 < \beta < -3{,}1$.

De même l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]0\ ;\ +\infty[$ une seule racine positive α ;
$f(1{,}7) = -0{,}154 < 0$ et $f(1{,}8) = +0{,}0078 > 0$ donc $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

4°



5° a) $x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x - 1} = x - 1 + 4 - \dfrac{4e^x}{e^x - 1} = x - 1 + \dfrac{4e^x - 4 - 4e^x}{e^x - 1} = x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1}$.

b) $A = \displaystyle\int_2^3 \left(x + 3 - \frac{4e^x}{e^x - 1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 4\,\ell n\,(e^x - 1)\right]_2^3 = \frac{11}{2} + 4\,\ell n\left(\frac{e^2 - 1}{e^3 - 1}\right) = 1{,}122\ \mathrm{u}^2$.

6° $f(x) = g(x)$ équivaut à $f(x) = x$; $x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1} = x$; $-1 = \dfrac{4}{e^x - 1}$; $e^x = -3$.

La dernière égalité est impossible ($e^x > 0$) donc l'équation n'a pas de racines .

30 $f(x) = x + (x + 1)e^x$

1° a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + 1)e^x = 0$. donc $y = x$ asymptote oblique au voisinage de $-\infty$

b) $f(x) = y$ pour $x = -1$; $E(-1\,;-1)$.

c) $f(x) - y > 0$: $(x + 1)e^x > 0$; $x > -1$.

2° a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + xe^x + e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + e^x + \dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ branche asymptotique // à y'Oy

b) $f(-2) = -2 - e^{-2} = -2 - \dfrac{1}{e^2}$ $\quad f(-2) = -2{,}1$

3° a) Min $f'(x) = \dfrac{1}{2} > 0$: $f(x) > 0$ donc f est strictement croissant.

b) $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = (1 + 2e) - 1 = 2e\ u^2$.

4° a) $f'(0) = 1$: $y = 1\,(x - 0) + 1 = x + 1$.

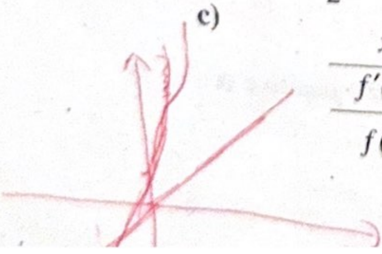
b) $f'(1) = \dfrac{1}{2}$: $y = \dfrac{1}{2}\,(x - 1) + 1 + 2e = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2} + 2e$.

c)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

$x = 1$ point d'inflexion



31 1° **a)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\ (xe^x - e^x + 1) = 1$, donc la droite (d) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) .

b) $y = 1$ et $1 = (1-1)e^x + 1$; d'où (C) coupe (d) en $E\ (1\ ;\ 1)$; $x > 1$: (C) est au-dessus de (d) .

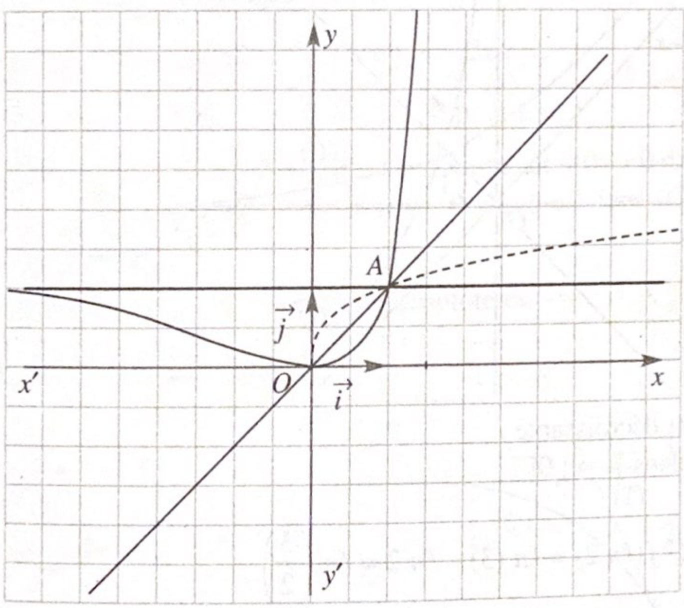
c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $f(2) = e^2 + 1 = 8{,}389$.

2° $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3° $f'(x) = (x+1)e^x$; $f'(x)$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe ; donc (C) admet un point d'inflexion .

4° **a)**



b) $m = (x-1)e^x + 1$

* $m < 0$ pas de solution

* $m = 0$: $x_1 = x_2 = 0$

* $0 < m < 1$: deux solutions

* $m \geqslant 1$: une solution .

5° **a)** f est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ elle admet donc une fonction réciproque g .

(G) est le symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

b) figure .

$$\mathscr{A} = 2\int_0^1 \left[x - f(x)\right] dx = 2\int_0^1 (x - 1 + e^x - xe^x)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - x + e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\, dx .$$

c) Or $\int_0^1 xe^x\, dx = [xe^x] - \int_0^1 e^x\, dx = e - (e-1) = 1$.

d'où $\mathscr{A} = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + e - 1\right) - 2 = 2e - 5\ \ u^2$.