

Exercice I

$$1) \ln\left(\frac{1}{e^m}\right) + 2 \ln \sqrt{e^{m+1}} = -\ln e^m + \ln(\sqrt{e^{m+1}})^2$$

$$= -m \ln e + \ln e^{m+1} = -m + m+1 = 1 \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{A}$$

$$2) x > 0 \text{ et } x-2 > 0; x > 2 \text{ donc } x > 2$$

$$\ln x + \ln(x-2) < \ln 3; \quad \ln(x(x-2)) < \ln 3$$

comme $\ln$ est une fonction strictement croissante

$$\text{alors } x(x-2) < 3; \quad x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1 \quad \frac{x \mid -1 \quad 3}{x^2 - 2x - 3 \mid + \quad - \quad +} \quad \textcircled{1}$$

donc $-1 < x < 3$ or $x > 2$ donc $2 < x < 3$ \textcircled{C}

$$3) x^2 - 1 > 0 \text{ et } 2 - \ln x \neq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\frac{x \mid -1 \quad 1}{x^2 - 1 \mid + \quad - \quad +}$$

$$x < -1 \text{ ou } x > 1$$

$$\ln x \neq 2$$

$$x \neq e^2$$

$$x \in]1; e^2[\cup]e^2; +\infty[\quad \textcircled{1}$$

$x \in]1; e^2[\cup]e^2; +\infty[\quad \textcircled{A}$

$$4) \int_1^e \left[\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} (\ln x)^2 \right] dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} (\ln x)^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{(\ln e)^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{(\ln 1)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3e^2 - 1}{6} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{B}$$

$$5) g'(x) = 2x + \frac{a}{x}$$

$$g'(1) = 3 \rightarrow 2 + a = 3$$

$$\textcircled{a=1} \quad \textcircled{1}$$

$$g(1) = 0$$

$$\text{alors } 0 = 1 + a + b$$

$$\textcircled{b=-1} \quad \textcircled{A}$$

$$6) f(x) = x + \frac{1 + \ln x}{x} \quad f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = - \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = - \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}; \quad f''(x) = 0$$

$$2 \ln x = 1; \quad \ln x = \frac{1}{2}; \quad x = e^{\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

point d'inflexion

Exercice II

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \frac{1}{0} = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \frac{1}{\infty} = \infty$ donc possibilité d'asymptote oblique

$$d = f(x) - y = x - \frac{1}{x \ln x} - x = -\frac{1}{x \ln x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} d = -\frac{1}{\infty} = 0^-$ alors $y = x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

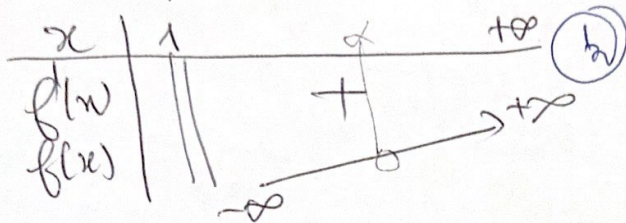
position: $d = f(x) - y = -\frac{1}{x \ln x} \quad x > 0$

[pour $0 < x < 1$; $d > 0$: (C) au-dessus de (d)]
 pour $x > 1$; $d < 0$: (C) en-dessous de (d)

$$3) f'(x) = 1 - \frac{(\ln x + \frac{1}{x})}{(x \ln x)^2} = 1 + \frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} \quad (1)$$

$x > 1$; $\ln x > 0 \rightarrow \ln x + 1 > 0 \rightarrow (x \ln x)^2 > 0 \rightarrow f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante pour $x > 1$



pour $x \in]1; +\infty[$
4) f est définie continue
strictement croissante

donc elle est bijective
elle passe de $-\infty$ à $+\infty$ alors

elle passe par le zéro une seule fois d'où
 $f(x) = 0$ admet une solution unique x $(1/2)$

$$\left. \begin{aligned} f(1,5) &= -0,144 < 0 \\ f(1,6) &= 0,27 > 0 \end{aligned} \right\} f(1,5) \cdot f(1,6) < 0 \text{ alors } 1,5 < x < 1,6$$

$$6) a) A(t) = \int_e^t (y_d - y_c) dx \quad (1/2)$$

$$A(t) = \int_e^t \frac{1/x}{\ln x} dx = \left| \ln(\ln x) \right|_e^t$$

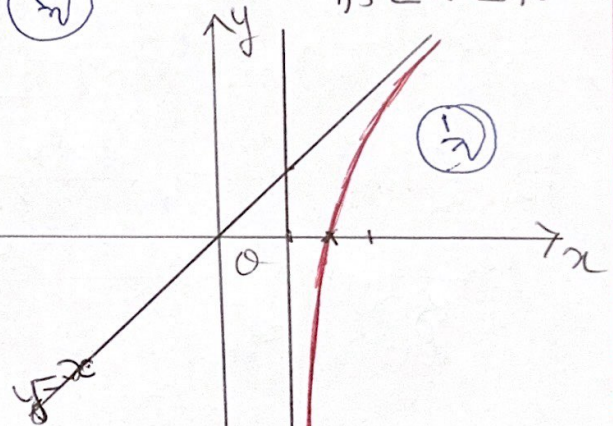
$$A(t) = \ln(\ln t) - \quad (3/4)$$

$$b) t > e$$

$$\ln t > 1 \text{ or } t > \ln t$$

$$\text{donc } \ln(t) > \ln(\ln t) \quad x=1 \quad (3/4)$$

$$\text{alors } t > \ln(\ln t) \rightarrow t > A(t) \text{ ou } A(t) < t.$$



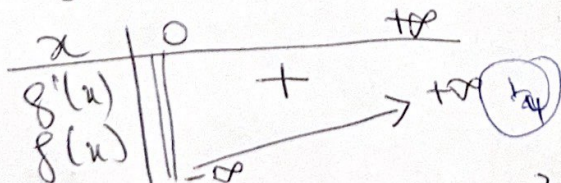
Exercice III.

$$A - g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x \quad (1/2)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad (1/2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$2) g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0 \quad (1/2) \text{ car } x > 0$$



$$3) g(1) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad (1/2)$$

pour $0 < x < 1$; $g(x) < 0$
pour $x = 1$; $g(1) = 0$
pour $x > 1$; $g(x) > 0$

$$B-1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{1}{x^2} \ln x \right] = \dots [0 - \gamma(-e)] = +\infty \quad (1/2)$$

$x=0$ Asymptote verticale

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln x}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{2x} \right] = +\infty$$

$$f(x) - y = x - \frac{\ln x}{x^2} - x = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x^2} \right) = 0 \quad (1/2)$$

b) pour $0 < x < 1$: $f(x) - y > 0$: (C) est au-dessus de (d)
 pour $x = 1$: $f(x) - y = 0$: (C) coupe (d) au point $(1, 1)$
 pour $x > 1$: $f(x) - y < 0$: (C) est en dessous de (d)

$$3) f'(x) = 1 - \frac{1/x^2 + 2x \ln x}{(x^2)^2} = 1 - \frac{1 + 2x^2 \ln x}{x^4} \quad (1/2)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1 + 2x^2 \ln x}{x^4} = \frac{x^4 - 1 - 2x^2 \ln x}{x^4} = \frac{g(x)}{x^4}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$4) f'(x) = 1$$

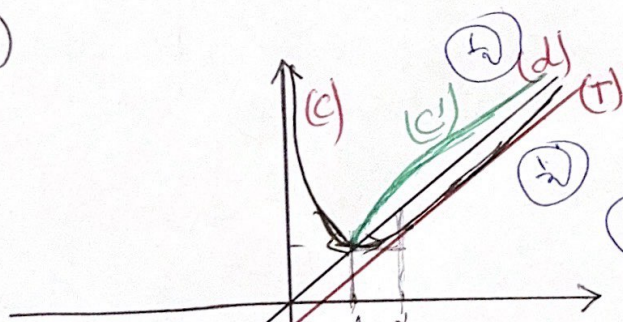
$$g(x) = x^3$$

$$-1 + 2x^2 \ln x = 0 \quad (1/2)$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2} \in (e^{1/2}, e^{1/2} - \frac{1}{2e})$$

5)



$$7)a) \left(\frac{-1 - \ln x}{x} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x + 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-1 + 1 + \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \quad (1/2)$$

$$b) \int_1^x \left(x - x + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx = \int_1^x \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$A(x) = \left[\frac{-1 - \ln x}{x} \right]_1^x = \frac{-1 - \ln x}{x} + 1 \quad (1/2)$$

c) $A(x) <$ aire du triangle de côté $(x-1)$

$$A(x) < \frac{(x-1)^2}{2} \quad (1/2)$$

6) pour $x \in [1; +\infty[$; f est définie continue strictement monotone croissante donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} . $f^{-1} = [1; +\infty[$