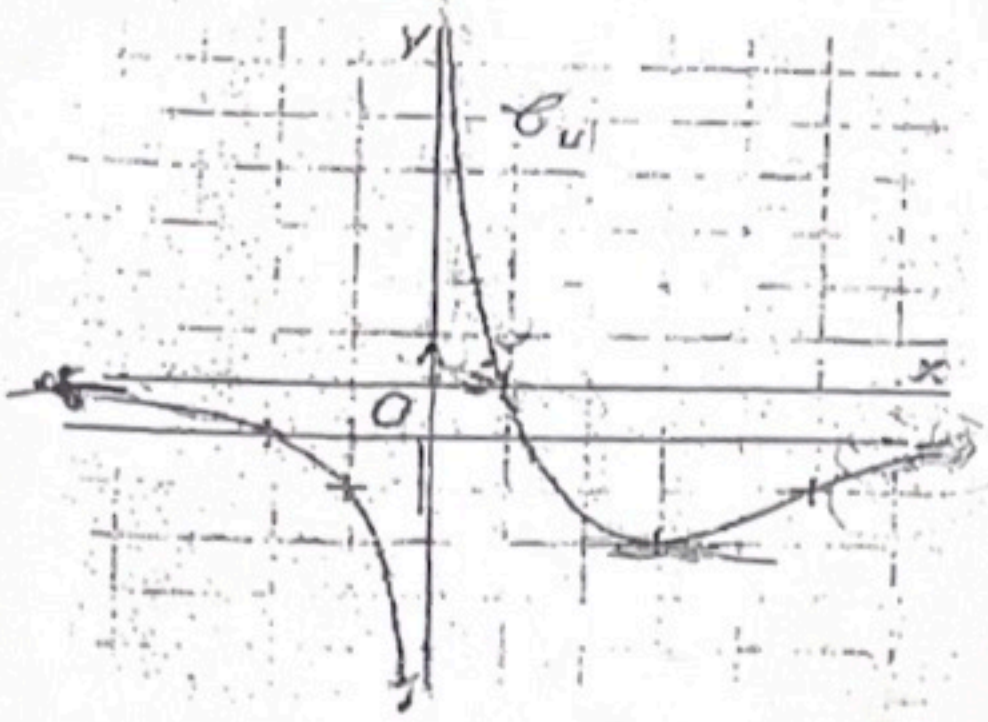
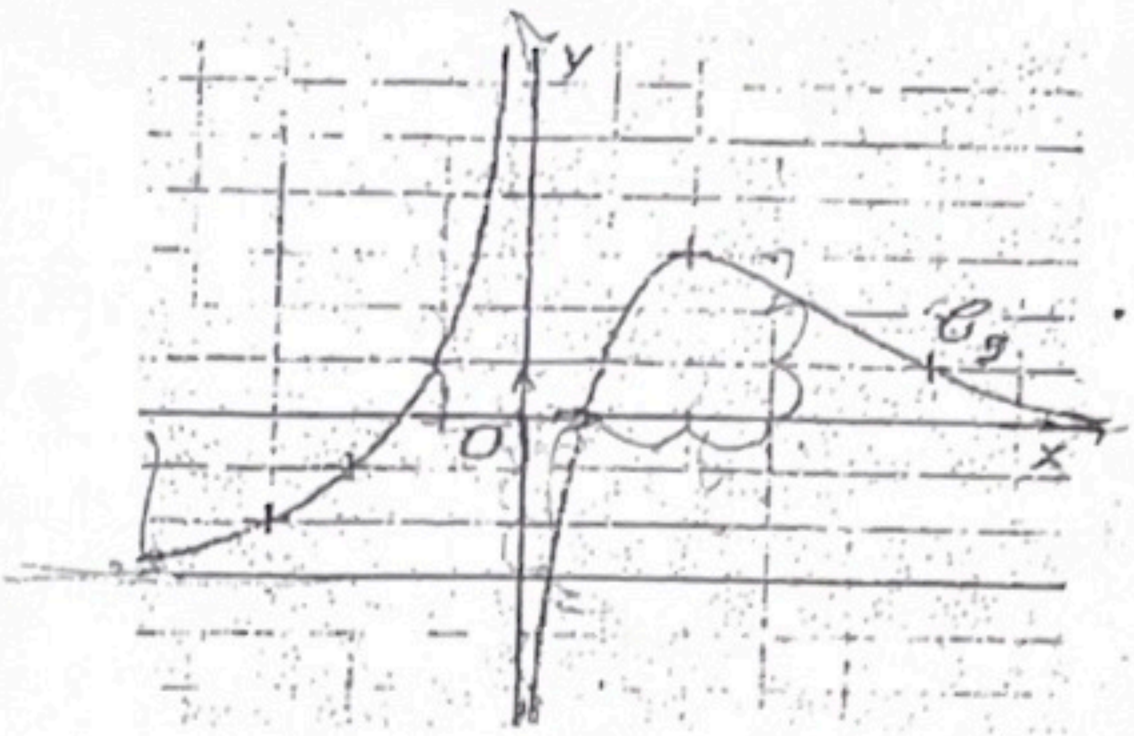
Collège des Soeurs des Saints-Coeurs
Bikfaya

SV - SG.
Année 2023-2024

Mathématiques : Fonctions

I. Les fonctions u et g sont données ci-dessous par leurs courbes représentatives :





Coordonnées de quelques points des deux courbes

x	-2	-1	$2/3$	1	3	5
$u(x)$	-1	-2	2	0	-3	-2

x	-3	-2	-1	1	2	5
$g(x)$	-2	-1	1	1	3	1

On considère la fonction composée $f = g \circ u$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ;
   Interpréter graphiquement les résultats.
3. **a)** Dresser le tableau des variations de u, en faisant apparaître les images de $2/3$ et de 1.
   b) Dresser le tableau des variations de g.
   c) En déduire le tableau des variations de la composée f.
   d) Donner une allure de la courbe représentant f dans un repère orthonormal (on précisera les points d'abscisse -2, $2/3$ et 5).

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que f admet un point d'inflexion w dont on déterminera les coordonnées.
3. Démontrer que w est centre de symétrie de (C).
4. Ecrire une équation de la tangente (T) en w à (C).
5. Tracer (C) et (T).
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
7. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des racines de l'équation $f(x) = m$.

III. Soit f la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Dresser le tableau des variations de f.
3. **a)** Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (C) et (d).
4. Tracer la courbe (C) et la droite (d).

5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.
6. Tracer, dans le même repère, la courbe (C') représentative de f^{-1}.
7. Trouver la forme explicite de $f^{-1}(x)$.

V. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x+1$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que $f(x)=0$ possède une racine α telle que $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$.
3. Construire, dans un repère orthonormé, la courbe représentative (C_f) de f.
4. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque f^{-1}.
5. Tracer, dans le même repère, la courbe $(C_{f^{-1}})$.
6. Soit M' le point de $(C_{f^{-1}})$ d'abscisse 3. Trouver l'équation de la tangente en M' à $(C_{f^{-1}})$.
7. (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ se coupent en I. On désigne respectivement par (T) et (T') les tangentes en I à (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ et par β l'angle aigu de (T) et (T'). Calculer $\tan\beta$.

<u>N.B.</u> $u \nearrow$ sur I et $g \nearrow$ sur $u(I)$ alors

$g \circ u \nearrow$ sur I

$u \nearrow$ sur I et $g \searrow$ sur $u(I)$ alors

$g \circ u \searrow$ sur I

<u>N.B.</u> u et g de m variations alors $g \circ u \nearrow$

u et g de variations opposées alors $g \circ u \searrow$

SSCC Bikfaya

MATH - ANALYSE

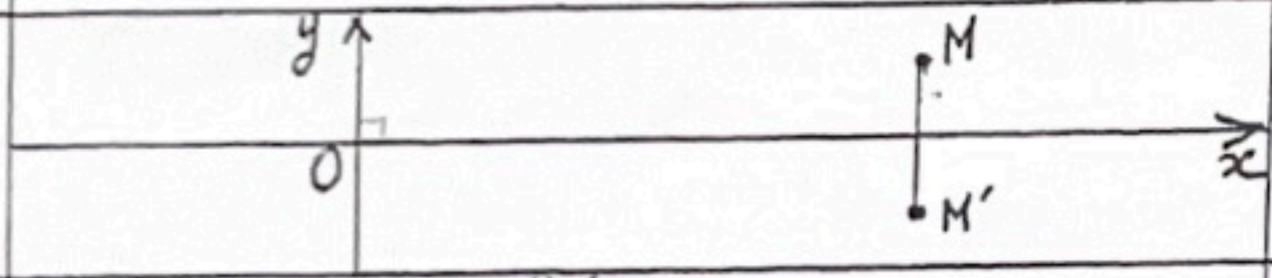
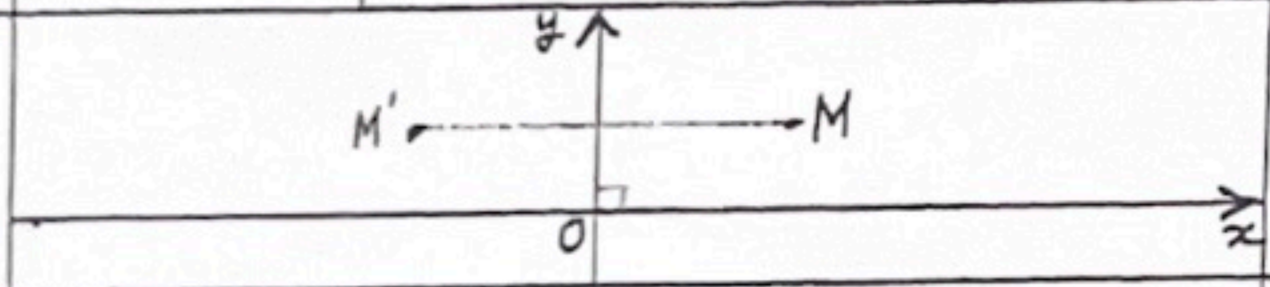
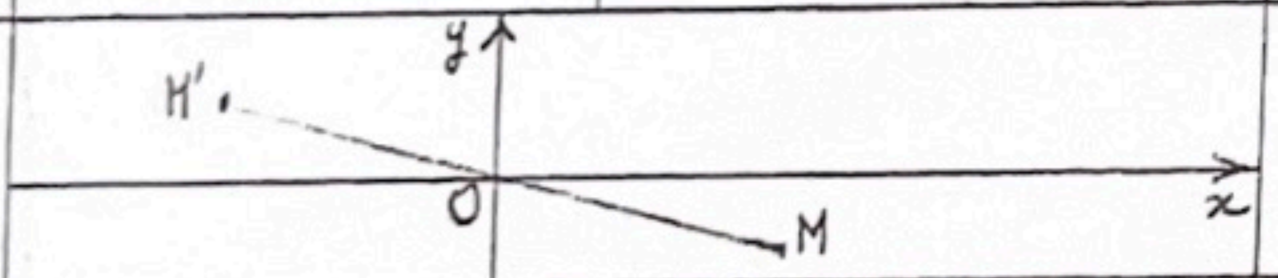
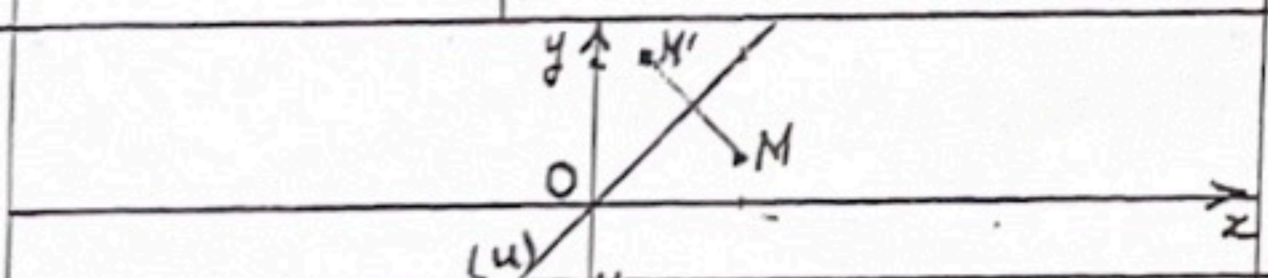
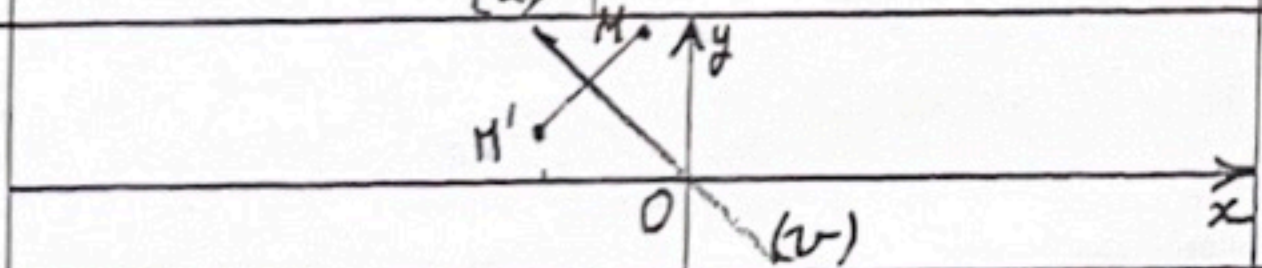
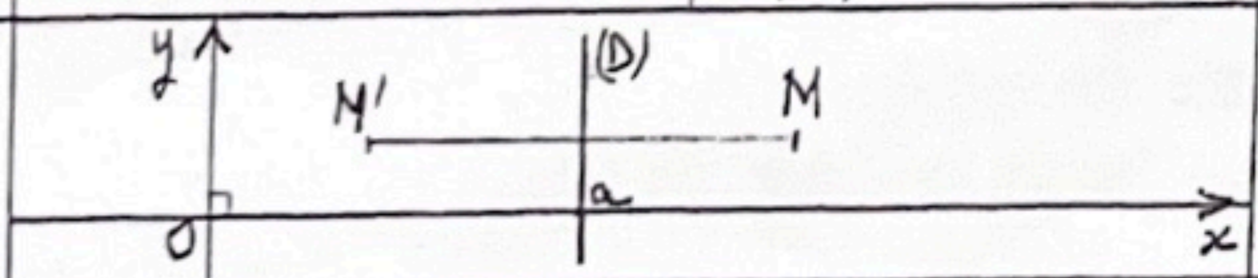
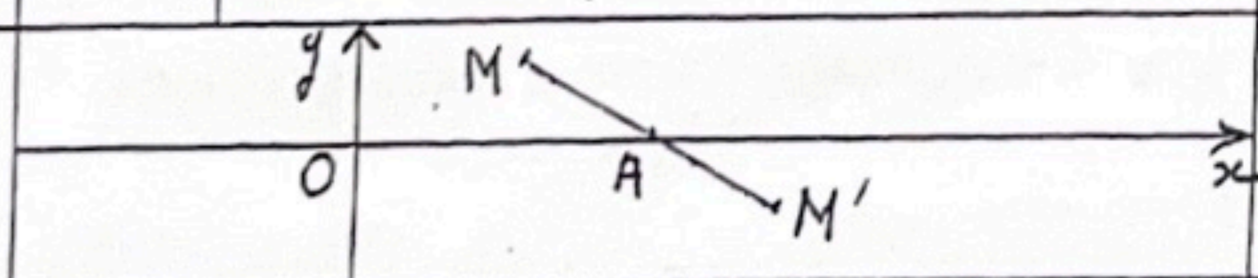
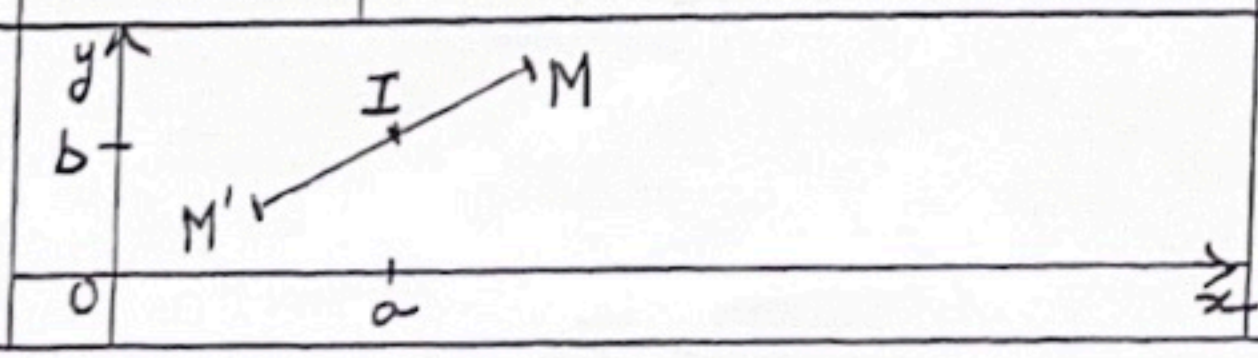
S.V- SG

Année 2023- 2024

Symétrie (Fonctions)

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan d'axes (x'Ox , y'Oy)

M(x ; y) et M' (x' ; y') sont 2 points du plan .

M et M' sont symétriques par rapport à	Représentations	Relations entre les coordonnées	Exemples
L'axe (x' x)		**x' = x** **y' = - y**	
L'axe (y' y)		**x' = - x** **y' = y**	
L'origine O		**x' = - x** **y' = - y**	
La droite (u) d'équation : y = x 1ère bissectrice des axes		**x' = y** **y' = x**	
La droite (v) d'équation : y = - x 2ème bissectrice des axes		**x' = - y** **y' = - x**	
La droite (D) d'équation : x = a		**x' = 2 a - x** **y' = y**	
Le point A (a , 0)		**x' = 2 a - x** **y' = - y**	
Le point I (a ; b)		**x' = 2 a - x** **y' = 2 b - y**	

Symétrie (Fonctions)

SV-SG

Définitions:

I étant un ensemble de réels , f une fonction numérique d'une variable réelle de domaine I et (C) une courbe dans le plan.

- I est dit centré en 0 lorsque : Pour tout x élément de I alors – x est élément de I.
- f est dite paire lorsque :
  a) I est centré en 0.
  b) $f(-x) = f(x)$
- f est dite impaire lorsque :
  a) I est centré en 0.
  b) $f(-x) = -f(x)$
- (C) admet une droite (u) comme axe de symétrie lorsque le symétrique de tout pt de (C) par rapport à (u) est un pt de (C).
- (C) admet un point A comme centre de symétrie lorsque le symétrique de tout pt de (C) par rapport à A est un pt de (C).

Théorème (admis)

f étant une fonction numérique d'une variable réelle de domaine I .
(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (x'x) et (y'y) .
alors

- f est paire sur I si et seulement si (y'y) est un axe de symétrie de (C)
- f est impaire sur I si et seulement si O est un centre de symétrie de (C).

- Si $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a - x) = f(a + x)$ sur I alors la droite (d): $x = a$ est un axe de symétrie de (C).
  Si $f(2a - x) = -f(x)$ sur I alors le point I(a ; 0) est un centre de symétrie de (C).
  Si $f(2a-x) + f(x) = 2b$ sur I alors le point A(a ; b) est un centre de symétrie de (C).

NB : La réciproque est vraie dans chaque cas à condition que les domaines soient bien précisés.

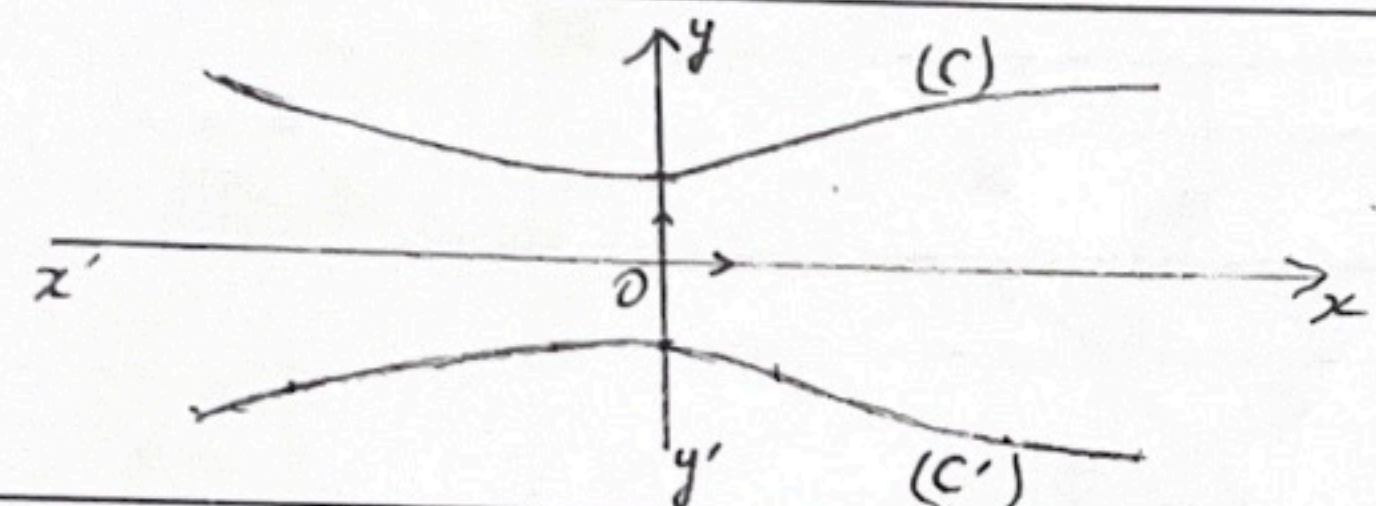
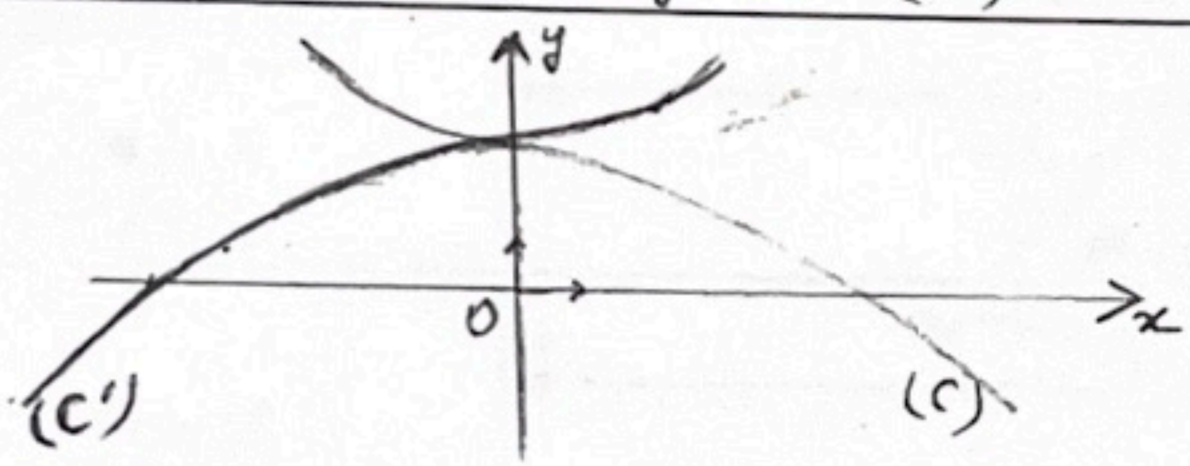
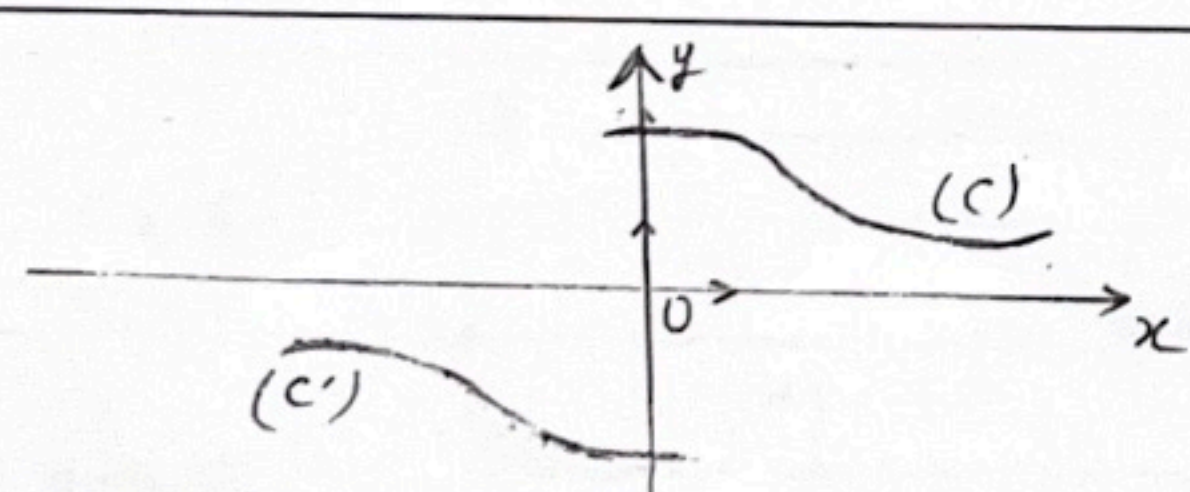
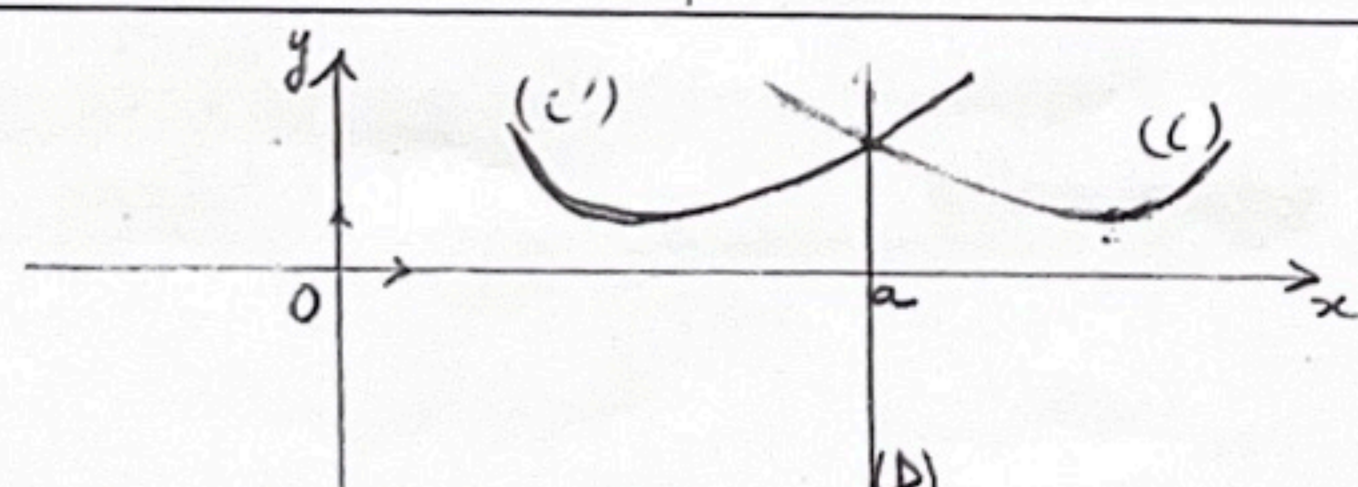
MATH - ANALYSE

Symétrie (Fonctions)

SV_SG

f et g sont des fonctions numériques d'1 variable réelle .
(C) : courbe de f ; Dom f = I
(C') : courbe de g ; Dom g = J

On suppose dans 1, 2 et 3 que: si $x \in I$ alors $-x \in J$
et dans 4 : si $x \in I$ alors $(2a - x) \in J$

		Représentations	Relations	Exemples
1	(C) et (C') symétriques par rapport à (x'x)		$g(x) = -f(x)$	
2	(C) et (C') symétriques par rapport à (y'y)		$g(-x) = f(x)$	
3	(C) et (C') symétriques par rapport à l'origine O.		$g(-x) = -f(x)$	
4	(C) et (C') symétriques par rapport à la droite (D) : x = a		$g(2a-x) = f(x)$	