

Nombres complexes (SV +SG)

Un **nombre complexe** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + bi$ où a et b sont des **nombres réels** et i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

$$Z = a + bi \quad (\text{forme algébrique})$$

Le nombre a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe et le nombre b la **partie imaginaire**.

$$a = \text{Re}(z) \quad b = \text{Im}(z)$$

1. Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre $\bar{z} = a - bi$.

$$\begin{aligned} * \text{Re}(\bar{z}) &= \text{Re}(z) \\ * \text{Im}(\bar{z}) &= -\text{Im}(z) \\ * z + \bar{z} &= 2\text{Re}(z) \\ * z - \bar{z} &= 2i\text{Im}(z) \\ * z \times \bar{z} &= [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2 \\ * \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ * \overline{z - z'} &= \bar{z} - \bar{z}' \\ * \overline{z \times z'} &= \bar{z} \times \bar{z}' \\ * \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \\ * \overline{z^n} &= (\bar{z})^n \end{aligned}$$

Remarques :

$$1) \quad z \text{ réel} \quad \text{sii} \quad \text{Im}(z) = 0$$

$$z \text{ réel} \quad \text{sii} \quad \bar{z} = z$$

$$2) \quad [z \text{ imaginaire pur}] \quad \text{sii} \quad [z \neq 0 \text{ et } \text{Re}(z) = 0]$$

$$[z \text{ imaginaire pur}] \quad \text{sii} \quad [z \neq 0 \text{ et } \bar{z} = -z]$$

$$3) \quad |z| = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \text{ et } \bar{z} = \frac{1}{z}$$

2. Calcul avec des nombres complexes

Pour **additionner** ou **soustraire** deux nombres complexes, on additionne ou soustrait séparément leurs parties réelles et imaginaires.

Pour calculer le **produit** de deux nbres complexes on utilise la **distributivité** et la propriété $i^2 = -1$.

Pour calculer le **quotient** de deux nombres complexes on multiplie d'abord les deux nombres par le **conjugué** du deuxième nombre puis on simplifie le résultat.

3- Nombres complexes dans le plan

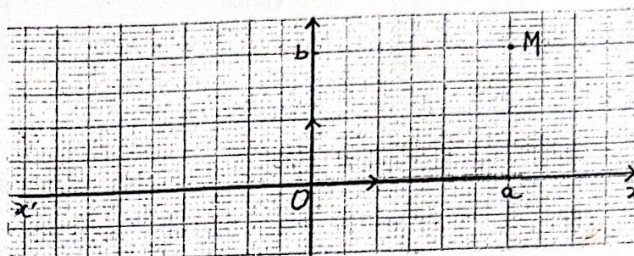
Comme les nombres complexes ont deux composantes (partie réelle et partie imaginaire)

on peut les placer dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en inscrivant

la partie réelle sur l'axe des abscisses qui sera appelé l'axe des réels

et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées qui sera appelé l'axe des imaginaires purs.

On ne parle plus de coordonnées mais d'affixe. On note $M(z)$ avec $z = z_M =$ affixe de M



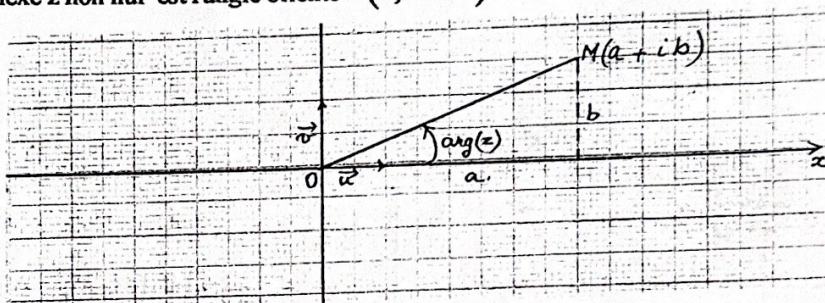
Module et argument

• Le module d'un nombre complexe z représenté par un point M est la distance OM . Il est noté $|z|$.

• L'argument d'un nombre complexe z non nul est l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Il est noté $\arg(z)$.

$$|z| = OM$$

$$\arg(z) = (\vec{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$$



Pour un nombre complexe non nul $z = a + bi$, et, en notant $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \in [2\pi]$, on a toujours :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Remarques Pour tout nombre complexe $z = a + bi$ et z non nul

1) Si z est réel positif alors $|z| = z = a$ et $\arg(z) = 0 \quad [2\pi]$

Si z est réel négatif alors $|z| = -a$ et $\arg(z) = \pi \quad [2\pi]$

Si z est réel alors le module de z est égal à la valeur absolue de z et $\arg(z) = 0 \quad [\pi]$

2) Si z est imaginaire pur avec $\text{Im}(z) > 0$ alors $|z| = b$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Si z est imaginaire pur avec $\text{Im}(z) < 0$ alors $|z| = -b$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Si z est imaginaire pur alors le module de z est égal à la valeur absolue de la partie imaginaire de z qui est ici b et $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

3) Les réciproques de toutes les propositions énoncées dans 1) et 2) sont vraies.

4-

Quelques propriétés du module et de l'argument

$$|z|=0 \text{ si } z=0$$

$$|z|=|-z|=|z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ si } z' \neq 0$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Et pour z et z' non nuls, l'on a :

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi] \text{ pour tout } n \text{ entier naturel}$$

5 Autres écritures d'un nombre complexe

• Forme trigonométrique

La connaissance du module r et d'un argument θ permet d'écrire un nombre complexe non nul sous sa forme

trigonométrique.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

On note

$$z = [r; \theta]$$

$$[r, \theta] = [r', \theta'] \text{ équivaut à } r = r' \text{ et } \theta = \theta' \quad [2\pi]$$

$$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$$

$$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

$$k \times [r, \theta] = \begin{cases} [kr, \theta] & \text{si } k > 0 \\ [-kr, \pi + \theta] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

6-

Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$[1, \theta]^n = [1, n\theta]$$

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

6. Forme exponentielle $\underline{z = re^{i\theta}}$ ($r > 0$)

$$\begin{aligned}
 re^{i\theta} &= r' e^{i\theta'} \quad \text{équivalent à} \quad r = r' \text{ et } \theta = \theta' \quad [2\pi] \\
 \overline{re^{i\theta}} &= r e^{-i\theta} \\
 -re^{i\theta} &= r e^{i(\theta+\pi)} \\
 (re^{i\theta})(r' e^{i\theta'}) &= rr' e^{i(\theta+\theta')} \\
 k(re^{i\theta}) &= kr e^{i\theta} \text{ si } k > 0 \\
 k(re^{i\theta}) &= -kr e^{i(\theta+\pi)} \text{ si } k < 0 \\
 \frac{1}{re^{i\theta}} &= \frac{1}{r} e^{-i\theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{re^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} &= \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \\
 (re^{i\theta})^n &= r^n e^{i(n\theta)}
 \end{aligned}$$

7. Distances et angles

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors :

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$AB = |z_{\overline{AB}}|$$

Si de plus C et D sont deux points d'affixes respectives z_C et z_D alors :

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

8. Equation du deuxième degré

Une équation du deuxième degré admet toujours 0, 1 ou 2 solutions (suivant le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$)

Si on considère, dans le cas où delta est négatif, qu'il est possible de calculer la racine carrée de delta en utilisant les nombres complexes, alors une équation du deuxième degré admet deux solutions lorsque delta est négatif.

Ces solutions sont : $z_1 = \frac{-b-w}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+w}{2a}$, w étant une racine carrée de Δ . ($w^2 = \Delta$)