COLLEGE SSCC - Bikfaya

SV - SG.

Année 2022-2023

Maths

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x)=1-(x-1)^3$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ *et* $f(3)$.

2) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3) Soit A le point de (C) d'abscisse 1. Ecrire une équation de la tangente (Δ) en A à (C).

4) Montrer que A est un point d'inflexion de (C).

5) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (Δ).

6) Montrer que A est un centre de symétrie de (C).

7) Construire (C) et (Δ).

8) Soit (D) la droite passant par A et de pente -1. Trouver les coordonnées des points d'intersections de (C) et (D).

9) a) Montrer que, sur $]-\infty;+\infty[$, f admet une fonction réciproque, notée g.

   b) Déterminer le domaine de définition de g.

   c) g est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse.

   d) Justifier que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ *et* $]1;+\infty[$.

10) Déterminer $(C)\cap(C')$ où (C') est la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

11) Tracer (C').

12) Trouver la forme explicite de g.

13) Montrer que (C') admet un centre de symétrie à déterminer.

14) a) Montrer que, sur $[1;+\infty[$, f' admet une fonction réciproque, notée h.

    b) Résoudre en x, $f'(1) < g(x) < h(-3)$.

BON TRAVAIL

Exercice - Fonctions :

$f(x) = 1 - (x-1)^3$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = 2$

$f(1) = 1$

$f(2) = 0$

$f(3) = -7$

$f(-1) = 9$

2) $f'(x) = -3(x-1)^2 \leq 0$

$f'(x) = 0 \quad x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	(Point d'inflexion)	$\searrow$	$-\infty$

3) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\boxed{(D) : y = 1}$

4) $f''(x) = -6(x-1)$

$f''(x) = 0 \; ; \; x = 1$

$\mathbb{R}$	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\cup$ convexe		$\cap$ concave	

Pour $x = 1$; $f''(x)$ s'annule en changeant de signe donc (C) admet A un point d'inflexion.

OU (C) admet en A une tangente horizontale d'équation $y = 1$ et $f'(x)$ s'annule en A sans changer de signe. Donc A pt d'inflexion

5) $d = f(x) - y = 1 - (x-1)^3 - 1 = -(x-1)^3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
d		$+$	0	$-$	
Position		(C) au dessus de (D)		(C) au dessous de (D)	

(C) et (D) se coupent en A

on dit au point A la tangente traverse la courbe.

6) $\forall x \in \mathbb{R}$; $2 - x \in \mathbb{R}$

et $f(x) + f(2-x) = 2b$

en effet

$1 - (x-1)^3 + 1 + (x-1)^3 = 2 = 2 \times 1 = 2b$ vérifiée

$f(x) = 1 - (x-1)^3$

$f(2-x) = 1 - (2-x-1)^3$

$= 1 - (-x+1)^3$

$= 1 + (x-1)^3$

8) $A \in (D)$; les coordonnées de A vérifient l'équation de (D) $\quad y = -x + b$

$1 = -1 + b$

$b = 2$

$(D) : y = -x + 2$

$(C) \cap (D)$:

$$\begin{cases} f(x) = 1 - (x-1)^3 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$1 - (x-1)^3 + x - 2 = 0$

$1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + x - 2 = 0$

$1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + x - 2 = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

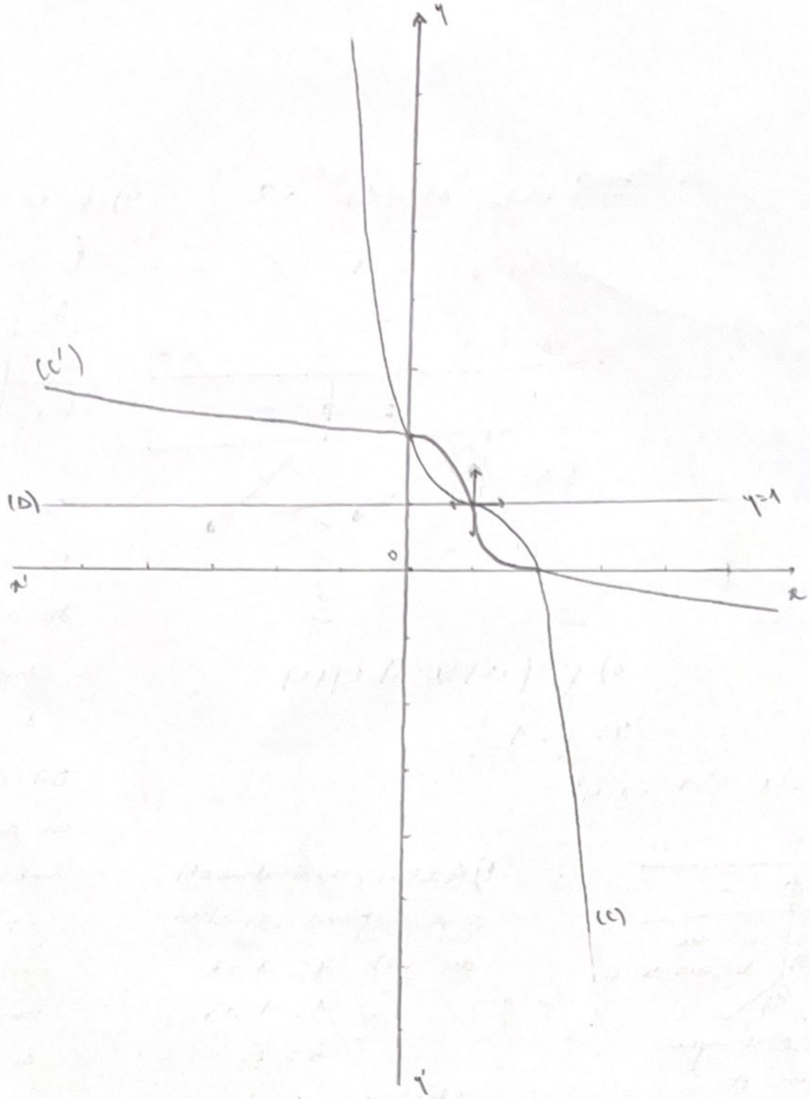
$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 2$

$y = 2 \qquad y = 1 \qquad y = 0$

$E(0,2)$, $F(1,1)$ et $G(2,0)$

7)



9) a) sur $]-\infty ; +\infty[$, $f(x)$ est continue, strictement monotone décroissante. Donc elle admet une fonction réciproque g.

b) $D_f :]-\infty ; +\infty[\rightarrow]-\infty ; +\infty[$

$D_g :]-\infty ; +\infty[\rightarrow]-\infty ; +\infty[$

c) En $x=1$; f admet une tangente horizontale. Par symétrie par rapport à la première bissectrice, cette tangente à g devient verticale en $x=1$, par suite la pente de cette tangente est ∞ d'où g n'est pas dérivable en ce pt

d) g et f ont les m variations donc sur $]-\infty ; 1[$ g est continue, dérivable strictement monotone décroissante. de m sur $]1 ; +\infty[$

10) (C) ∩ (C')　　　f et g se coupent sur la première bissectrice $y=x$

$f(x) = g(x) = x$

$1-(x-1)^3 = x$

$-x+1-(x-1)^3 = 0$

$(x-1) + (x-1)^3 = 0$

$(x-1)((x-1)^2+1) = 0$

$(x-1)(x^2-2x+1+1) = 0$

$(x-1)(x^2-2x+2) = 0$

$x=1$　　↳ $\Delta < 0$ pas de solutions

$y=1$

$A(1;1)$

11) (C') sym (C) par rapport à la droite $y=x$

12) $f(x) = 1-(x-1)^3$

$y = 1-(x-1)^3$

$(x-1)^3 = 1-y$

$x-1 = \sqrt[3]{1-y}$

$x = \sqrt[3]{1-y}+1$

Alors $g(x) = \sqrt[3]{1-x}+1$

13) (C) admet $A(1;1)$ centre de symétrie

or (C') sym (C) $y=x$ => (C') admet $A(1;1)$ centre symétrie

14) a) $f'(x) = -3(x-1)^2$

$f''(x) = -6(x-1)$

$f''(x) = 0$　$x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↗	0	↘	$-\infty$

sur $[1;+\infty[$; f' ~~continue~~ strictement monotone décroissante donc elle admet une fonction réciproque h définie sur $]-\infty,0]$

b) $h(-3) => f'(x) = -3$

$-3(x-1)^2 = -3$

$(x-1)^2 = 1$

$x^2-2x+1 = 1$

$x(x-2) = 0$

$x=0$ à rejeter car $0 \notin [1;+\infty[$　ou $x=2$ acceptable

$f'(1) = 0$

alors

$0 < g(x) < 2$ alors

$0 < x < 2$　(Graphiquement)

ou $0 < g(x) < 2$

$f\downarrow$ alors $f(2) < f(g(x)) < f(0)$

donc $\boxed{0 < x < 2}$