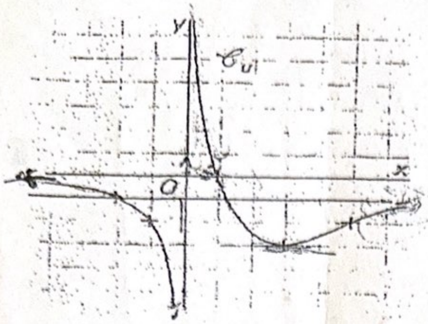
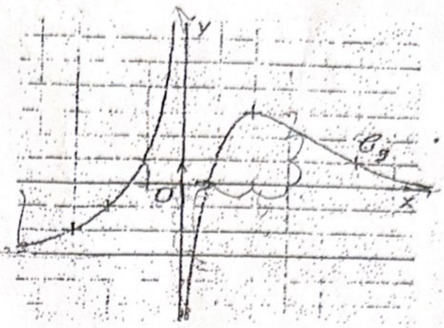
Collège des Soeurs des Saints-Coeurs
Bikfaya

SV-SG.

Mathématiques : Fonctions (2)

I. Les fonctions u et g sont données ci-dessous par leurs courbes représentatives :





Coordonnées de quelques points des deux courbes

x	-2	-1	$2/3$	1	3	5
$u(x)$	-1	-2	2	0	-3	-2

x	-3	-2	-1	1	2	5
$g(x)$	-2	-1	1	1	3	1

On considère la fonction composée $f = g \circ u$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ;
   Interpréter graphiquement les résultats.
3. a) Dresser le tableau des variations de u, en faisant apparaître les images de $2/3$ et de 1.
   b) Dresser le tableau des variations de g.
   c) En déduire le tableau des variations de la composée f.
   d) Donner une allure de la courbe représentant f dans un repère orthonormal (on précisera les points d'abscisse -2, $2/3$ et 5).

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que f admet un point d'inflexion w dont on déterminera les coordonnées.
3. Démontrer que w est centre de symétrie de (C).
4. Ecrire une équation de la tangente (T) en w à (C).
5. Tracer (C) et (T).
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
7. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des racines de l'équation $f(x) = m$.

III. Soit f la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Dresser le tableau des variations de f.
3. a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (C) et (d).
4. Tracer la courbe (C) et la droite (d).

5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.
6. Tracer, dans le même repère, la courbe (C') représentative de f^{-1}.
7. Trouver la forme explicite de $f^{-1}(x)$.

V. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x+1$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que $f(x)=0$ possède une racine α telle que $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$.
3. Construire, dans un repère orthonormé, la courbe représentative (C_f) de f.
4. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque f^{-1}.
5. Tracer, dans le même repère, la courbe $(C_{f^{-1}})$.
6. Soit M' le point de $(C_{f^{-1}})$ d'abscisse 3. Trouver l'équation de la tangente en M' à $(C_{f^{-1}})$.
7. (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ se coupent en I. On désigne respectivement par (T) et (T') les tangentes en I à (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ et par β l'angle aigu de (T) et (T'). Calculer $\tan\beta$.

<u>N.B.</u> $u \nearrow$ sur I et $g \nearrow$ sur $u(I)$ alors $g \circ u \nearrow$ sur I

$u \nearrow$ sur I et $g \searrow$ sur $u(I)$ alors $g \circ u \searrow$ sur I

<u>N.B.</u> u et g de m̂ variations alors $g \circ u \nearrow$

u et g de variations opposées alors $g \circ u \searrow$