Collège des Sœurs des Saints-Cœurs
Bickfaya

Année Académique 2022-2023
Matière : Mathématiques
Classe : SG
Date : 4/11/2022
Durée : 100mn

Calculatrice non programmable et non graphique, autorisée.
Barème sur 20.

Deuxième contrôle .

Exercice I- (6pts)

Dans le tableau suivant, une seule réponse proposée à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N^0	*Questions*	*Réponses*		
		A	*B*	*C*
1	Le domaine de définition de la fonction fof tel que $f(x)=\sqrt{1-x}$ est :	$x>1$	$x<1$	$0\leq x\leq 1$
2	F est la fonction définie sur R par $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{1}{(t^2+1)^2}dt$ est :	Non monotone sur R	Croissante sur R	Décroissante sur R
3	$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}=$	$\frac{3}{4}$	-2	1
4	f et g sont deux fonctions dérivables sur R et l'on a $f(x)=x^2+1$ et $g'(5)=3$ alors $(gof)'(-2)=$	15	-12	1
5	$f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2-1}$ est une fonction de courbe (C) L'équation de l'asymptote oblique à (C) en $+\infty$ est :	$y=x$	$y=2x$	$y=2x-1$
6	$\int_1^2 t\sqrt{-t+3}\ dt$ =	$\frac{36\sqrt{2}}{5}-\frac{24}{5}$	$\frac{6\sqrt{2}}{5}-\frac{8}{5}$	$\frac{12\sqrt{2}}{5}-\frac{8}{5}$

Exercice II- (5pts)

A- Calculer les intégrales ci-dessous

$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x^5-sinx)dx$ $\qquad$ $J=\int\left(\frac{-1}{2}x^2-x\sqrt[3]{x^4}\right)dx$

$K=\int sin3x\ sinx\ dx$ $\qquad$ $L=\int\frac{2+sin^2x}{cos^2x}\ dx$

B- Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

1) $\arg\left(\frac{e^{i\pi}}{i}\right)=\frac{\pi}{4}$

2) M(z) est un point variable du plan complexe vérifiant $|z-2i| = |z+4i|$. L'ensemble des points M est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

3) Si $Z = \frac{z-i}{z+1}$ avec $z = x+iy$ alors la partie imaginaire de Z est $\frac{y-x-1}{(x+y)^2+y^2}$

Exercice III- (4pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et M d'affixes respectives $a = 4+\frac{5}{2}i$; $b = 4-\frac{5}{2}i$; $c = 2+\frac{3}{2}i$ et $z = x+iy$.

1) Ecrire le nombre $(2c-1)$ sous forme trigonométrique.
Déduire un argument de $(2c-1)^2$. Que peut-on conclure ?

2) a) Calculer $W = \frac{b-c}{a-c}$. Montrer que W est imaginaire pur et l'écrire sous la forme exponentielle.
b) Interpréter le module et l'argument de W et déduire que le triangle ABC est rectangle en C .

3) (E) désigne l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|z-4| = \frac{5}{2}$.
a) Les points A, B et C sont-ils des points de (E) ?
b) Montrer que (E) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

4) Soit $Z = \frac{z-i}{z}$ pour z non nul. Pour quelles valeurs de z on a : $Z = \bar{Z}$.

Exercice IV- (5pts)

On considère la fonction f définie sur [-1 ; $+\infty$[par $f(x) = x - 4\sqrt{x+1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox; y'Oy$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]$. Que peut-on conclure.

2) Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe $x'Ox$.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4) Tracer (C).

5) Soit (S) la surface limité par (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Calculer l'aire A de (S) puis calculer le volume du corps engendré par rotation de (S) autour de l'axe des abscisses.

6) Soit g la restriction de f sur [3 ; $+\infty$[. Montrer que g admet une fonction réciproque h et caractériser h (domaine et courbe représentative).

BON TRAVAIL

SSCC Bikfaya — Mathématiques. — Classe SG 2022/2023 — Deuxième contrôle

Exercice I

1) $x \longrightarrow f(x) \longrightarrow f(f(x))$

$x \in D_f$ et $f(x) \in D_f$

$x \leq 1$ et $f(x) \leq 1$

$\sqrt{1-x} \leq 1$

$1-x \leq 1$

$-x \leq 0$

$x \geq 0$

D_f : $1-x \geqslant 0$, $-x \geqslant -1$, $x \leq 1$

$x \geqslant 0$ et $x \leq 1$ donc $x \in [0,1]$ (C) (1)

2) $(F(x))' = \left(\int_{x^2}^{1} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\right)' = \frac{1}{((x^2)^2+1)^2} \times 2x = \frac{2x}{(x^4+1)^2}$

pour $x>0 \rightarrow F'(x) > 0$ et pour $x \leq 0 \rightarrow F'(x) \leq 0$ (A) (1)

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3+x}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{\frac{2}{2\sqrt{2x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{10-x}}} = 1$ (C) (1)

4) $(g \circ f)'(-2) = g'(f(-2)) \times f'(-2) = g'(5) \times (2x-2) = 3x-4 = -12$ (B) (1)

5) $2x^3+1$ divisé par x^2-1 : quotient $2x$, reste $2x+1$

$y = 2x$ A.O. en effet (B) (1)

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{\infty}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = 0$

6) $I = \int_1^2 t\sqrt{-t+3}\,dt$ $\quad u = t \quad u' = 1$

$v' = dv = (-t+3)^{\frac{1}{2}} \quad v = -\frac{(-t+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}}$ (1)

$I = \int_1^2 uv' = [uv]_1^2 - \int_1^2 u'v = \left[-\frac{2}{3}t(-t+3)^{3/2}\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{(-t+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,dt$ (C)

$I = -\frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}\left[-\frac{(-t+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{-4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{15} + \frac{16\sqrt{2}}{15} = \frac{12\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$

Exercice II

A- $I = 0$ car $f(-x) = -x^5 + \sin x = -f(x)$: f fonction impaire (1)

$f = -\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} = -\frac{x^3}{6} - \frac{3}{10}x^3\sqrt{x} + K$ (1)

$K = \int \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$ (1)

$L = \int\left(\frac{2}{\cos^2 x} + \tan x\right)dx = 2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx + \int(\tan^2 x + 1)\,dx - \int 1\,dx$ (1)

$= 2\tan x + \tan x - x + C = 3\tan x - x + C$

B- $\arg\left(\frac{e^{i\pi}}{i}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \left[\pi - \frac{\pi}{2}\right][2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (Faux) (1)

2) A(2i) B(-4i) $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$ AM = BM donc M ∈ médiatrice de [AB] qui est // à x'Ox Vrai (1)

3) $Z = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+x-ixy+iyx+iy+y^2-ix-i-y}{(x+1)^2+y^2}$ (1)

$Im(Z) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$ Faux

Exercice III

1) $2C - 1 = 2(2+\frac{3}{2}i) - 1 = 4+3i-1 = 3+3i = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (½)

$\arg((2C-1)^2) = \arg\left((3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right) = 2\times\frac{\pi}{4}\ [2\pi] = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ → $(2C-1)^2$ imaginaire pur (½)

2) a) $w = \frac{4-\frac{5}{2}i-2-\frac{3}{2}i}{4+\frac{5}{2}i-2-\frac{3}{2}i} = \frac{2-4i}{2+i} = \frac{(2-4i)(2-i)}{4+1} = \frac{4-24-8i-4}{5} = -2i$

alors w imaginaire pur $w = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (½)

b) $|w| = 2$ et $\arg(w) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (¼) alors $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (¼)

Donc $(\vec{CA}, \vec{CB}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi)$ ce qui donne (½) que ABC triangle rectangle en C

3) a) $|z_A - 4| = |4+\frac{5}{2}i-4| = \frac{5}{2}$

$|z_B - 4| = |4-\frac{5}{2}i-4| = \frac{5}{2}$ (½)

Alors A, B et C ∈ (E) $|z_C - 4| = |2+\frac{3}{2}i-4| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$

b) $|z-4| = \frac{5}{2}$ (1) $|z_M - z_D| = \frac{5}{2}$

avec D d'affixe 4 alors $DM = \frac{5}{2}$ → (E) est le cercle de centre D et de rayon $\frac{5}{2}$

4) $z = \bar{z}$ alors $\frac{z-i}{z} = \frac{\bar{z}+i}{z}$ Donc $z\bar{z} - iz = z\bar{z} + iz$; $z = -z$ (1)

z imaginaire pur $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

Exercice IV

1) $\lim_{\infty} f(x) = \infty$ (¼) $\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (¼) $\lim_{\infty}[f(x) - x] = -\infty$ (¼)

au voisinage de $+\infty$ la courbe admet une direction asymptotique oblique parallèle à $y = x$ (de pente 1)

2) $x - 4\sqrt{x+1} = 0$; $x \geq 0$ $x = 4\sqrt{x+1}$ → $x^2 = 16(x+1)$ → $x = 8+4\sqrt{5}$ (½)

3) $f'(x) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2)}$ (½)

x	-1	3	$+\infty$
f'(x)	‖	− 0	+
f(x)	‖ +∞	↘ -5	↗ +∞

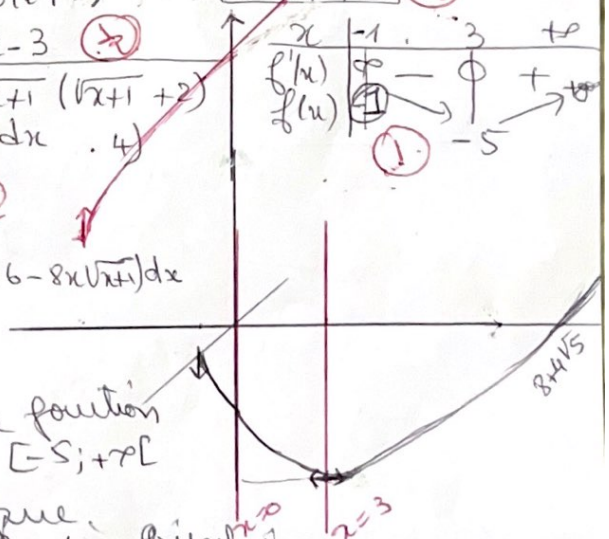
(1)

5) $A = \int_0^3 (y - f(x))\,dx = \int_0^3 (-x+4\sqrt{x+1})\,dx$ (¼)

$A = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^3 = \frac{85}{6}\ u.^2$ (½)

$V = \int_0^3 \pi f^2(x)\,dx = \pi\int_0^3 (x^2+16x+16-8x\sqrt{x+1})\,dx$ (½)

$V = \frac{1007}{15}\pi\ u^3$

6) g continue strictement croissante sur $[3, +\infty[$ donc admet une fonction réciproque et décroissante sur $[-5; +\infty[$

(1) f est symétrique de g % à la 1ère bissectrice