Collège des Sœurs des Saints-Cœurs
Bickfaya

Année Académique 2022-2023
Matière : Mathématiques.
Classe : SG
Date : Lundi 30/1/23
Durée : 240mn

Nom et Prénom : ______________________

Toute copie mal rédigée ou mal présentée sera pénalisée.
Calculatrice non programmable et non graphique, autorisée.
Barème sur 40.

Premier Examen.

Je suis plein(e) de ressources et j'ai confiance en moi ! Quel que soit l'obstacle en face de moi, je peux tout surmonter !

Exercice I- (5pts)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner en justifiant la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		A	B	C
1)	Dans une pochette il y a 10 billets : 5 billets de 5$, 3 billets de 10$ et 2 billets de 20$. On tire 3 billets un à un et sans remise. De combien de façons peut-on faire ce tirage si le premier billet est un billet de 5$ et les deux autres sont de genres différents.	24	60	30
2)	De combien de façons peut-on avoir au moins une boule rouge si on tire simultanément 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges, 3 boules noires et 4 boules vertes.	185	216	1110
3)	La transformation $z' = -i + \frac{1+i}{\sqrt{2}} z$ est une :	Rotation de centre O	Rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$	Translation
4)	Un sac contient trois jetons A,B et C. A a deux faces rouges, B a deux faces blanches et C a une face rouge et une face blanche. On tire au hazard un jeton du sac et on le jette sur un table. Calculer la probabilité que la face lisible soit rouge est :	0,25	0,75	0,5
5)	La valeur de n < 7 vérifiant : $3C_n^4 = C_{n-1}^5$ est :	N'existe pas	8,5	3

Exercice II. (8pts)

A. Calculer les racines cubiques du nombre complexe $-i$.

B. On donne $p(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$.

Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera. Résoudre $p(z) = 0$.

C. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B tels $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a) Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

c) Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2) A tout point $M\ d'affixe\ z$ on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$, $z \neq 0$.

a) Montrer que $\bar{z}(z' - 1) = 2$.

b) En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), le point M décrit le cercle (T) à determiner.

3) On considère le point $M_n\ d'affixe\ z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + 5\frac{n\pi}{6})}$, n est un entier naturel.

a) Montrer que M_n appartient à un cercle fixe et que les points $M_n\ et\ M_{n+6}\ sont$ diamétralement opposés.

b) Montrer que : $z_{n+4} = e^{-2i(\frac{\pi}{3})}\ z_n$. En déduire que $M_nM_{n+4} = \sqrt{3}$ et que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

Exercice III. (5pts)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère les deux suites (U_n) et (V_n) définie par $U_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ et $V_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

1) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1 + x)$.

a) Dresser le tableau de variations de . En déduire que, pour tout $x > 0, \ln(1 + x) < x$.

b) Calculer $ln\ (U_n)$ et montrer que, pour tout $n \geq 1,\ U_n < e$.

(Il est conseillé d'utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{n}$).

2) Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1 + x)$.

a) Dresser le tableau de variations de h . En déduire que, pour tout $x > 0, \ln(1 + x) > \frac{x}{x+1}$.

b) Calculer $ln\ (V_n)$ et montrer que, pour tout $n \geq 1,\ V_n > e$.

3) a) Montrer que, pour tout $n \geq 1,\ V_n - U_n = \frac{1}{n}\ U_n$.

En déduire que, pour tout $n \geq 1, V_n - U_n < \frac{e}{n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1,\ 0 < e - U_n < V_n - U_n$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

·rcice IV. (5pts)

s le plan orienté P, on considère un triangle ABC rectangle en A, isocèle et direct. Soit I, J et K les milieux ›ectifs de [BC], [CA] et [AB]. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\vec{C}$. On pose $f = RoT$ et $g = ToR$.

a) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

a) Déterminer la nature de la composée gof^{-1}.

Trouver l'image de A par gof^{-1}. Caractériser alors gof^{-1}.

Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g. Quelle est la nature du uadrilatère ACM_2M_1.

Exercice V. (8pts)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ IR par : $\begin{cases} f(x) = x(lnx - 1)^2 \ pour \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On admet que f est continue en $x = 0$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interpétation graphique de ce résultat.

b) Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = (lnx)^2 - 1$ et dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I et écrire une équation de la tangente (T) en I à (C).

4) La droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe (C) en O, I et J. Calculer les coordonnées de J.

5) Tracer (T) et (C) .

6) a) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2}{2}\left[(lnx)^2 - 3lnx + \frac{5}{2}\right]$, est un primitive de f.

b) Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , la tangente (T) et l'axe des abscisses.

7) Démontrer que f admet , sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$ une fonction réciproque notée f^{-1} et tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C) .

8) Soit (d_m) la droite d'équation $y = mx$ où $m > 0$. La droite (d_m) coube la courbe (C) en trois points O, M et M'.

a) Calculer en fonction de m, les coordonnées de M et M'.

b) Soit P le point de (d_m) d'abscisse $= e$. Démontrer que $\overline{OM}\,.\overline{OM'} = OP^2$.

Exercice VI. (9pts)

A.On considère l'équation différentielle (1) : $y' + 2y^2e^x - y = 0$ où y est une fonction définie sur R telle que, pour tout réel x, $y(x) \neq 0$. On pose $z = \frac{1}{y}$ où z est une fonction dérivable définie sur R.

1) Déterminer l'équation différentielle (2) satisfaite .

2) Résoudre l'équation (2) sachant que $z_0 = e^x$ est une solution particulière de (2) et en déduire la solution générale de (1).

3) Déterminer la solution particulière de (1) vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$.

B. On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{e^{x} + e^{-x}}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est une fonction paire.

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

b) Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une seule solution $\propto$. Vérifier que $0,4 < \propto < 0,5$.

c) Tracer (C) . (On suppose 1 unité = 4 cm).

4) a) Montrer que la restriction de f sur $[0 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque notée f^{-1} .

b) Déterminer le domaine de définition de f^{-1} et calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .

c) Tracer la courbe (γ) de f^{-1} dans le même repère que (C) .

C. On considère la suite (V_n) définie sur N par $V_n = \int_0^n f(x)dx$.

1) a) Montrer que, pour tout $x \geq 0, f(x) < e^{-x}$.

b) Déduire que, pour tout naturel , $V_n \leq 1 - e^{-n}$.

2) a) Vérifier que $V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

b) En déduire que la suite (V_n) est strictement croissante.

c) Montrer que (V_n) converge vers une limite l telle que $0 \leq l \leq 1$.

3) Vérifier que $f(x) = \frac{e^{x}}{1+ e^{2x}}$.

4) On donne $\int \frac{u'}{1+u^2} du = arctan u + k$; calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (γ) , $y'y,\ x'x\ et\ y = 2$.

BON TRAVAIL.

Collège des SSCC Bickfaya

Corrigé Premier Examen

Maths SG 30/1/23

Exercice 1

1) 1er billet 5\$, (2ème 10\$ et 3ème 20\$ ou 2ème 20\$ et 3ème 10\$) $\to 5\times(3\times2+2\times3)=60$ 1 (B)

2) Total − aucune rouge $= C_{12}^3 - C_7^3 = 185$ façons (A) 1

3) $z'=\frac{4i}{\sqrt2}z-i$ $\quad \left|\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right|=\sqrt{\frac12+\frac12}=1$ donc rotation

$z'=\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)z-i = e^{i\frac{\pi}{4}}z-1 \to$ angle $\frac{\pi}{4}$ (B) 1

4) soit tirer le jetons A ou tirer le jeton C parmi les jetons C et B :

$\frac13+\frac13\times\frac12=\frac12 \to 0{,}5$ (C) 1

5) $3\frac{n!}{(n-4)!\,4!}=\frac{(n-1)!}{(n-6)!\,5!}$; $\frac{3\cancel{(n-4)!}(n-3)(n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-4)!}\,3!\times4}=\frac{\cancel{(n-6)!}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-6)!}\,1\times2\times3\times4\times5}$

$n(n-1)(n-2)(n-3)\left[\frac18-\frac{(n-4)(n-5)}{120}\right]=0$; $15-n^2+5n+4n-20=0$ 1

$n=0,\ n=1,\ n=2,$
$n=3$ inacceptable.

$-n^2+9n-4=0 \quad n_1=8{,}5 \quad n_2=0{,}4$ inacceptable (A)

Exercice 2

A. $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ $\quad z$ étant la racine cubique de $-i$ alors $z^3=-i$

$z=re^{i\theta} \to z^3=r^3e^{3i\theta} \to r^3e^{3i\theta}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$; $r^3=1$; $r=\sqrt[3]{1}=1$

$3\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\theta=\frac{-\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ $\quad z_1=1e^{-\frac{\pi}{6}i}$, $z_2=1e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)i}$,

$z_3=1e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$ 1

B. $z_0=bi \to p(bi)=0$: $(bi)^3+(14-i\sqrt2)(bi)^2+(74-14\sqrt2 i)bi-74i\sqrt2=0$

$-b^3i-14b^2+b^2\sqrt2 i+74bi+14\sqrt2 b-74i\sqrt2=0$; $-14b^2+14\sqrt2 b+i(-b^3+b^2\sqrt2+74b-74\sqrt2)=0$ 1

$-14b^2+14\sqrt2 b=0$ et $-b^3+b^2\sqrt2+74b-74\sqrt2=0$

$-14b(b-\sqrt2)=0$
$b=0$ ou $b=\sqrt2$
inaccept

$\Rightarrow -(\sqrt2)^3+(\sqrt2)^2\sqrt2+74\sqrt2-74\sqrt2=-2\sqrt2+2\sqrt2=0$

Donc $z_0=\sqrt2 i$ solution

$$\begin{array}{l|l}
z^3+(14-i\sqrt2)z^2+(74-14i\sqrt2)z-74\sqrt2 i & z-\sqrt2 i \\
\underline{-\left(z^3-\sqrt2 i z^2\right)} & \overline{z^2+14z+74} \\
\quad 14z^2+(74-14i\sqrt2)z-74\sqrt2 i & \\
\quad \underline{-\left(14z^2-14\sqrt2 i z\right)} & \\
\quad\quad 74z-74\sqrt2 i & \\
\quad\quad \underline{-\left(74z-74\sqrt2 i\right)} & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

1

$p(z)=0$
alors $(z-\sqrt2 i)(z^2+14z+74)=0$
$z=\sqrt2 i$ ou $z^2+14z+74=0$ $\quad z_1=-7+5i$ et $z_2=-7-5i$

C. $z_A = 1 \quad z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (C)(A, 1)$

1) a) $z_B - z_A = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{3}}$ ($\frac{1}{2}$)

b) $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ($\frac{1}{2}$)

c) $\|\vec{AB}\| = 1 \rightarrow AB = 1$ donc $B \in (C)$ ($AB =$ rayon $= 1$) ($\frac{1}{2}$)

2) $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$ a) $z'\bar{z} = \bar{z} + 2 \rightarrow z'\bar{z} - \bar{z} = 2$; $\bar{z}(z' - 1) = 2$ ($\frac{1}{2}$)

b) $|\bar{z}(z' - 1)| = 2$; $|\bar{z}|\,|z' - 1| = 2$; $|z|\,|z_{M'} - z_A| = 2$

M' décrit (C) alors $AM' = 1 \rightarrow |z_{M'} - z_A| = 1 \rightarrow |z| = 2$; $OM = 2$

(1) M décrit le cercle de centre O et de rayon 2

3) a) $|z_n| = 1$ donc $OM_n = 1$ alors $M_n \in (C)(O, 1)$ ($\frac{1}{2}$)

a) $\frac{z_{n+6}}{z_n} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+6)\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+6)\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i5\pi} = e^{i\pi}$ (1)

donc $\arg\left(\frac{z_{n+6}}{z_n}\right) = \arg\left(\frac{z_{n+6} - z_O}{z_n - z_O}\right) = (\vec{OM_n}, \vec{OM_{n+6}}) = \pi\ [2\pi]$

Alors O, M_n, M_{n+6} sont alignés et M_n et M_{n+6} diamétralement opposés

b) $z_{n+4} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+4)\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + \frac{20\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} \cdot e^{i\frac{10\pi}{3}}$

$z_{n+4} = z_n e^{i\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = z_n e^{i\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = z_n e^{-\frac{2\pi}{3}i} = z_n e^{-2i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$M_n M_{n+4} = |z_{n+4} - z_n| = |z_n e^{-2i\frac{\pi}{3}} - z_n| = |z_n|\,|e^{-2i\frac{\pi}{3}} - 1|$

$M_n M_{n+4} = \left|\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|\frac{-3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|$ (1)

$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

($\frac{1}{2}$) * Dans le m̂ principe $M_{n+4}M_{n+8} = \sqrt{3}$

et $z_{n+8} = z_{n+4} e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ donc $M_{n+4}\widehat{O}M_n = M_{n+8}\widehat{O}M_{n+4} = \frac{2\pi}{3}$

Alors $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ triangle équilatéral ($\frac{1}{2}$)

Exercice III

($\frac{1}{2}$)

1) a) $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ ($\frac{1}{2}$)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

pour $x > 0$; $g(x) > 0$; $x - \ln(1+x) > 0$

$x > \ln(1+x)$ donc $\ln(1+x) < x$. ($\frac{1}{2}$)

b) $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ($\frac{1}{4}$)

$x = \frac{1}{n} \rightarrow \ln(u_n) = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 = \ln e$

Donc pour $n \geq 1$; $u_n < e$ ($\frac{1}{2}$)

2) a) $h'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} < 0$ $\frac{1}{2}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$0 \searrow -\infty$

$\frac{1}{2}$

pour $x > 0$; $h(x) < 0$; $\frac{x}{x+1} - \ln(1+x) < 0$

$-\ln(1+x) < \frac{-x}{x+1}$ $\frac{1}{2}$

Alors $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$

b) $\ln(V_n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\ln(V_n) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ on pose $x = \frac{1}{n}$ $\frac{1}{2}$

$\ln(V_n) = \left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) > 1$ donc $V_n > e$

3) a) $V_n - U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[1+\frac{1}{n}-1\right]$

$V_n - U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}U_n$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

comme $U_n < e$ alors $\frac{1}{n}U_n < \frac{e}{n}$ donc $V_n - U_n < \frac{e}{n}$

b) on a $U_n < e$ et $V_n > e$ alors $U_n < e < V_n$

on ajoute $-U_n$: $U_n - U_n < e - U_n < V_n - U_n$ donc
$n \geq 1$ $\qquad 0 < e - U_n < V_n - U_n$ $\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(e - U_n) < \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) < \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n}$

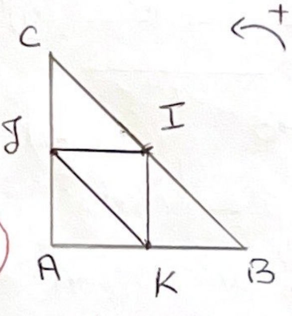
$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n} = 0 \to 0 < \lim\limits_{n\to\infty}(e - U_n) < 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(e - U_n) = 0 \to \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e \longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\frac{1}{2}$

Exercice IV.

$R(I, \frac{\pi}{2})$ $\quad T_{\frac{1}{2}\vec{BC}}$

$f = R \circ T \qquad g = T \circ R$



1) a) $f(K) = R\circ T(K) = R(T(K))$

$f(K) = R(J) = K$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$g(J) = T\circ R(J) = T(R(J)) = T(K) = J$

b) f est une rotation de centre K et d'angle $\pi/2$ $\frac{1}{2}$

g est une rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{2}$

2) a) $g(J, \frac{\pi}{2}) \qquad f(K, \frac{\pi}{2}) \qquad f^{-1}(K, -\frac{\pi}{2})$

$g\circ f^{-1}$ est le composé de 2 rotations, c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{2} = 0$ 1

Donc $g\circ f^{-1}$ est une translation car f et f^{-1} n'ont pas le même centre

b) $f^{-1}(A)=I$ et $g(I)=C$; $g\circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{AC}$ donc $g\circ f^{-1}(A)=C$ 1

c) $f(M)=M_1$ et $g(M)=M_2$ ou bien $M=f^{-1}(M_1)$ et $g(M)=M_2$

D'où $g\circ f^{-1}(M_1)=M_2$ par suite $\vec{M_1M_2}=\vec{AC}$. Donc ACM_2M_1 est un parallélogramme 1

Exercice V.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 1/2

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\ln x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\ln x-1)^2=+\infty$ 1/2

Donc au point $x=0$; la fonction n'est pas dérivable et au point $(0,0)$ il y a une tangente verticale 1/2

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x-1)^2=+\infty$ 1/2 car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\ln x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)=+\infty$ 1/2

au voisinage de $+\infty$, la courbe admet une direction asymptotique ou branche parabolique parallèle à $y'Oy$

2) $f'(x)=(\ln x-1)^2+x(2)\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x-1)=(\ln x-1)(\ln x-1+2)$

$f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)=(\ln x)^2-1$ 1/2

$(\ln x)^2-1=0$; $(\ln x)^2=1$; $\ln x=1$ ou $\ln x=-1$

$x=e$ $x=e^{-1}$

x	0	e^{-1}	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\emptyset$ +	0 −	0	+
$f(x)$	0 ↗	$4e^{-1}$ (1,47) ↘	0 ↗	$+\infty$

1/2   1/2

3) $f''(x)=2\dfrac{1}{x}\ln x$

$f''(x)=0\to \ln x=0\to x=1$

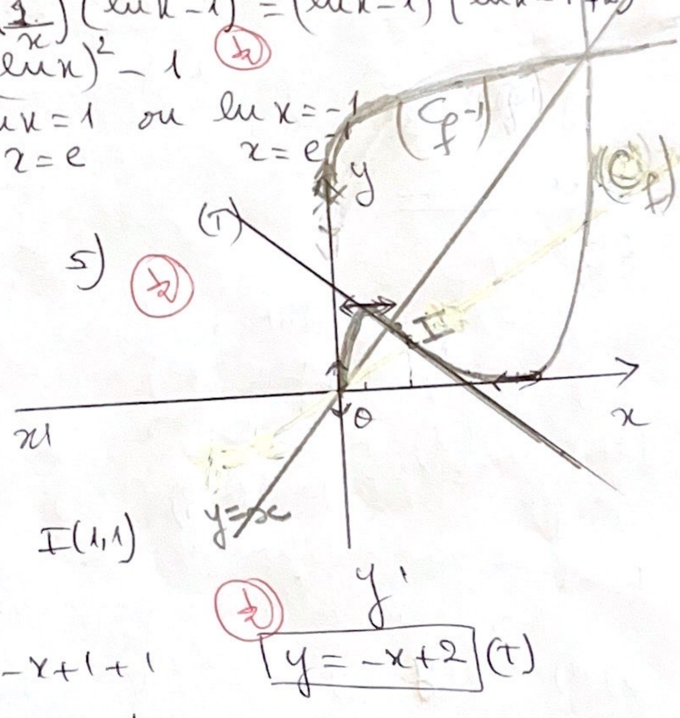
$x=1\to y=1(\ln 1-1)^2=1$ $I(1,1)$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=-1(x-1)+1$ 1/2 $y=-x+1+1$ $\boxed{y=-x+2}$ (T)

x	1	0
y	1	2

5) 1/2



4) $y = x$; $f(x) = x(\ln x - 1)^2$ $\quad f(x) = y$

$x(\ln x - 1)^2 = x$; $x\left[(\ln x - 1)^2 - 1\right] = 0$ $\quad x\left[\ln x - 2\right]\left[\ln x\right] =$

$x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$ $\quad$ ou $\ln x = 0$ $\quad O(0,0)$

$\ln x = 2$; $x = e^2$ $\quad x = 1$ $\quad I(1, 1)$

$J(e^2, e^2)$

$x = e^2$; $y = e^2$

6) a) $F'(x) = \frac{2x}{2}\left((\ln x)^2 - 3\ln x + \frac{5}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{x}\right)$

$F'(x) = x(\ln x)^2 - 3x\ln x + \frac{5}{2}x + x\ln x - \frac{3}{2}x$ $\quad \frac{1}{2}$

$F'(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + x = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right]$

$F'(x) = x(\ln x - 1)^2$ alors F est une primitive de f.

b) Aire $= \int_1^2 (f(x) - y)\,dx + \int_2^e f(x)\,dx$

Aire $= \left[F(x) - \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right]_1^2 + \left[F(x)\right]_2^e$ $\quad \frac{1}{2}$

Aire $= \left[\frac{4}{2}\left((\ln 2)^2 - 3\ln 2 + \frac{5}{2}\right) - (-2+4)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)\right] + \frac{e^2}{2}\left(1 - 3 + \frac{5}{2}\right) - \frac{4}{2}\left((\ln 2)^2 - 3\ln 2 + \frac{5}{2}\right)$

Aire $= -2 - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4}\right) u^2$ $\quad \frac{1}{2}$

7) Pour $x \in [e; +\infty[$, f est continue strictement monotone croissante de 0 à $+\infty$ donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}

$D_f = [e; +\infty[$ $\quad D_{f^{-1}} = [f(e); \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [0; +\infty[$ $\quad \frac{1}{2}$

8) a) $y = mx$; $f(x) = x(\ln x - 1)^2$ $\quad f(x) = y$ $\quad \frac{1}{2}$

$x(\ln x - 1)^2 - mx = 0$; $x\left[(\ln x - 1)^2 - m\right] = 0$; $x = 0 \to O(0,0)$

ou $(\ln x - 1)^2 - m = 0$; $(\ln x - 1)^2 = m$; $\ln x - 1 = \sqrt{m}$

ou $\ln x - 1 = -\sqrt{m}$; $\ln x = \sqrt{m} + 1$ ou $\ln x = -\sqrt{m} + 1$

$x = e^{\sqrt{m}+1}$ ou $x = e^{-\sqrt{m}+1}$

$M\left(e^{\sqrt{m}+1} ; m e^{\sqrt{m}+1}\right)$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad M'\left(e^{-\sqrt{m}+1} ; m e^{-\sqrt{m}+1}\right)$

b) $P : x = e$; $y = me$ $\quad P(e, me)$

$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} \cdot \sqrt{(x_{M'} - x_O)^2 + (y_{M'} - y_O)^2}$ $\quad \frac{1}{2}$

$= \sqrt{\left(e^{\sqrt{m}+1}\right)^2 + \left(m e^{\sqrt{m}+1}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(e^{-\sqrt{m}+1}\right)^2 + \left(m e^{-\sqrt{m}+1}\right)^2}$

$= e^{\sqrt{m}+1}\sqrt{1+m^2} \cdot e^{-\sqrt{m}+1}\sqrt{1+m^2}$

$= e^2(1+m^2)$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad$ d'où l'égalité

$OP^2 = (x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2 = e^2 + m^2e^2 = e^2(1+m^2)$

Exercice VI

A. 1) $z = \frac{1}{y}$; $y = \frac{1}{z}$; $y' = \frac{-z'}{z^2}$: $\frac{-z'}{z^2} + 2\left(\frac{1}{z^2}\right)e^x - \frac{1}{z} = 0$; $-z' + 2e^x - z = 0$

donc $\boxed{z' + z = 2e^x}$ (2) $\frac12$

2) $z' + z = 0$ admet pour solution $z = Ce^{-x}$ et $z_0 = e^x$ alors $z = Ce^{-x} + e^x$

$y = \frac{1}{z} \to y = \frac{1}{Ce^{-x} + e^x}$ solution de (1) $\frac12$

3) $y(0) = \frac12$: $\frac12 = \frac{1}{Ce^0 + e^0}$; $C + 1 = 2 \to C = 1 \to$ $\frac12$ $y = \frac{1}{e^{-x} + e^x}$

B. 1) $f(-x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = f(x)$ donc f paire et admet l'axe y'Oy $\frac12$ axe de symétrie

2) $f'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$; $f'(x) = 0$; $e^{-x} = e^x \to x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac12$	$\searrow$	0

$\frac12$

3) a) $g'(x) = f'(x) - 1$ comme $f'(x) < 0$ alors $g'(x) < 0$ $\frac12$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac12$	$\searrow$	$-\infty$

b) pour $x \in [0; +\infty[$; g est continue, strictement monotone décroissante de $\frac12$ à $-\infty$ donc passe par le zéro une fois unique $\to$ $g(x) = 0$ admet une solution unique α $\frac12$ $\frac12$

donc $f(x) = x$ admet une solution unique α

$g(0{,}4) = 0{,}0625 > 0$

$g(0{,}5) = -0{,}0556 < 0$

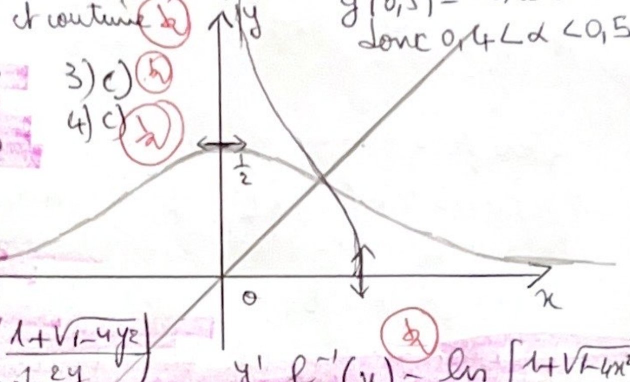
donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4) a) $x \in [0, +\infty[$, f strictement croissante et continue $\frac12$

b) $D_{f^{-1}} =]0, \frac12]$ $\frac12$ $f(x) = y = \frac{1}{e^{-x} + e^x}$

3) c) $\frac12$

4) c) $\frac12$



$ye^{-x} + ye^x - 1 = 0$; $y + ye^{2x} - e^x = 0$

$ye^{2x} - e^x + y = 0$ $\Delta = 1 - 4y^2$ $\frac12$

$e^x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$ ou $e^x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$

$x = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$ inaccept ou $x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$ accept $\frac12$

$\to$ $f^{-1}(x) = \ln\left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right]$

Partie C

1) a) $f(x) - e^{-x} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - e^{-x} = \frac{1 - e^0 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} < 0 \to f(x) < e^{-x}$ $\frac12$

b) $\int_0^n f(x)\,dx < \int_0^n e^{-x}dx \to V_n < (-e^{-x})_0^n \to V_n < 1 - e^{-n}$ $\frac12$

2) a) $V_{n+1} - V_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^{n+1} f(x)\,dx + \int_n^0 f(x)\,dx$

$V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ $\frac12$ b) $e^{-x} > 0$ et $f(x) > 0$ alors $V_{n+1} - V_n > 0$

$\frac12$ donc (V_n) strictement croissante

c) (V_n) croissante et majorée par 1 donc elle est convergente vers une limite ℓ $\frac12$

car $V_n \leq 1 - e^{-n} < 1$

comme $0 < V_n < 1$ alors $0 \leq \ell \leq 1$

3) $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ $\frac12$

4) Aire $= \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}dx = [\operatorname{Arctan} e^x]_0^2$

Aire $= (\arctan e^2 - \frac{\pi}{4}) \times 16\,cm^2$ $\frac12$