Collège des Sœurs des Saints Cœurs, Bickfaya

Année académique 2024-2025
Matière: Mathématiques
Classe: SG
Date: Octobre 2024

Chapitre 2 :Equations trigonométriques. Relations métriques.

1-Rappel.

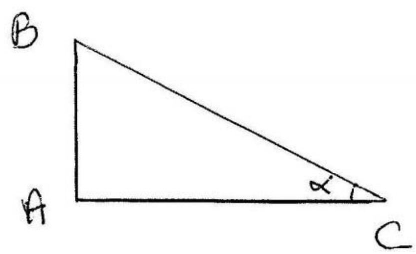
1- Dans un triangle rectangle ABC en A on a:

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$$



Pour tout réel α on a : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$;

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

2- La détermination principale ou la mesure principale est la mesure de la plus courte rotation d'un arc ou d'un angle orienté

$-180^o < d^o \leq 180^o$ ou $-\pi < d^{rd} \leq \pi$

3- la relation de passage de degré en radian ou inversement est:

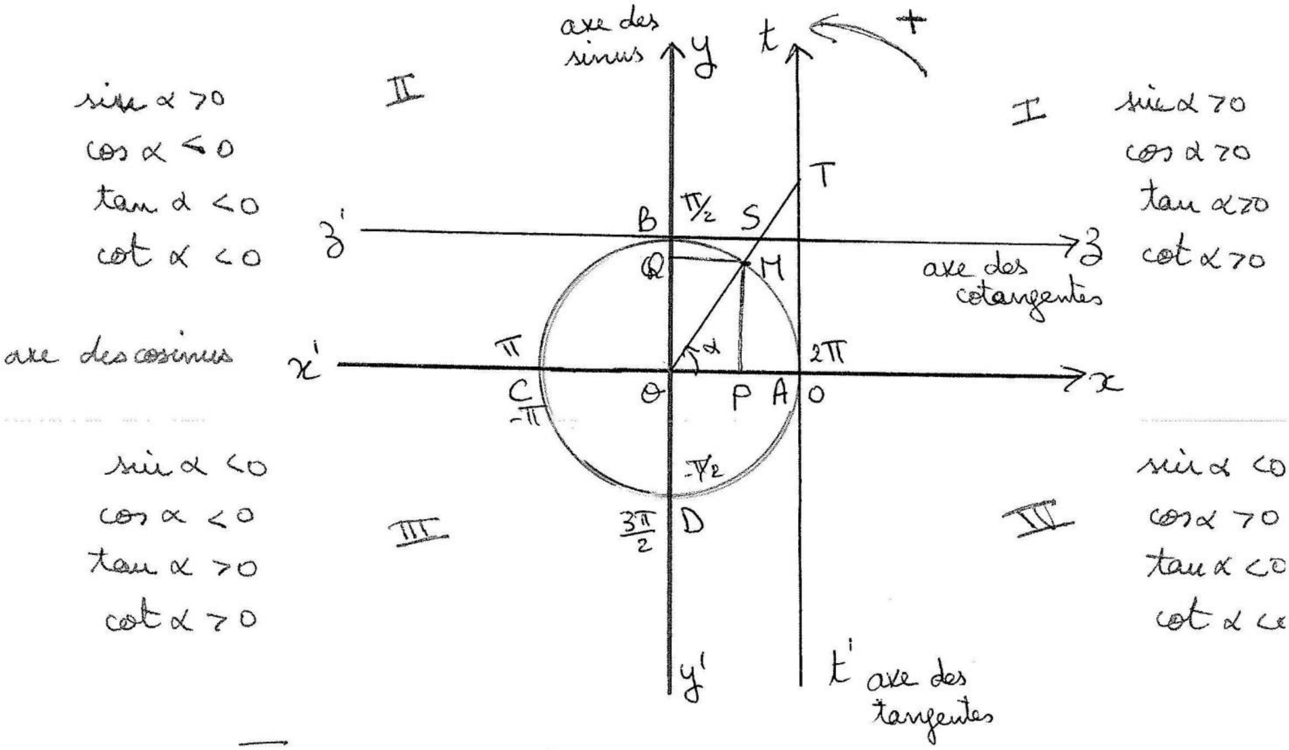
$$\frac{d}{360^o} = \frac{\alpha}{2\Pi^{rd}}$$

4- La longueur d'un arc est donnée par la relation:

$l = \alpha_{rd}\, r$ ou $l = \dfrac{\pi r d^o}{180^o}$

Avec r rayon du cercle

α_{rd} ou d^{o} la mesure de l'arc
l la longueur de l'arc
5- On appelle cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (x'ox , y'oy) le cercle orienté de centre O et de rayon 1 (unité de longueur)



$\cos\alpha = \overline{OP}$ = abscisse de M
$\sin\alpha = \overline{OQ}$ = ordonné de M
$\tan\alpha = \overline{AT}$
$\cot\alpha = \overline{BS}$

Pour tout $\alpha \in R$, $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $\tan\alpha \in R$ et $\cot\alpha \in R$
$\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sont deux fonctions périodiques de période 2Π .
$\tan\alpha$ et $\cot\alpha$ sont deux fonctions périodiques de période Π .

7- Tableau des valeurs d'arcs particulièrs:

Valeur de α en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Valeur de α en radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0	-1	0	1
sin α	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
tan α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

cot α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

8- Relation entre les arcs remarquables:

α et $-\alpha$	α et $\pi-\alpha$	α et $\pi+\alpha$	α et $\frac{\pi}{2}-\alpha$	α et $\frac{\pi}{2}+\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha$

9- Résolution d'équations trigonométriques

a) $\cos\alpha = \cos\beta = l$ avec $-1 \leq l \leq 1$
alors $\alpha = \beta + 2K\pi$, $K \in Z$ et $\alpha = -\beta + 2K'\pi$, $K' \in Z$

b) $\sin\alpha = \sin\beta = l$ avec $-1 \leq l \leq 1$
alors $\alpha = \beta + 2K\pi$, $K \in Z$ et $\alpha = \pi - \beta + 2K'\pi$, $K' \in Z$

c) $\tan\alpha = \tan\beta$
alors $\alpha = \beta + K\pi$, $K \in Z$

d) $\cot\alpha = \cot\beta$
alors $\alpha = \beta + K\pi$, $K \in Z$

10- Coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes :
M étant un point quelconque de coordonnées cartésiennes x et y dans un repère x'Ox , y'Oy et de coordonnées polaires r et θ où r est la distance de O à M et θ l'angle que forme (OM) avec l'axe x'Ox alors : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
(formules de passage de coordonnées polaires aux cartésiennes) .
$x^2 + y^2 = r^2$ et $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (formules de passage de coordonnées cartésiennes aux polaires) .

2-Formules d'addition.

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + tana\ tanb}$$

3-Lignes trigonométriques de l'angle double. (Formules de duplication).

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

4-Expression de sina , cosa et tana en fonction de tana/2.

En posant $\tan \frac{a}{2} = t$

$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

5-Formules de transformation :

D'un produit en une somme (linéarisation).

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

D'une somme en un produit.

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

6-Limites.

x est la mesure d'un angle exprimée en radians , alors $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

7-Dérivées des fonctions circulaires.

$f(x) = \sin x$ alors $f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$ alors $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$ avec $x \neq \Pi/2 + k\Pi$, $k \in Z$
$f(x) = \cot x$ alors $f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -1 / \sin^2 x$ avec $x \neq k\Pi$, $k \in Z$

Si u est une fonction dérivable de x alors :
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u) = u' / \cos^2 u$ avec $u \neq \Pi/2 + k\Pi$, $k \in Z$
$(\cot u)' = - u' (1 + \cot^2 u) = - u' / \sin^2 u$ avec $u \neq k\Pi$, $k \in Z$

8-Primitives des fonctions circulaires.

Fonction	Primitive
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$- \cos x + C$
$1 / \cos^2 x$	$\tan x + C$
$(1 + \tan^2 x)$	$\tan x + C$
$-1 / \sin^2 x$ ou $- (1 + \cot^2 x)$	$- \cot x + C$
$\cos (ax + b)$ $a \neq 0$	$1/ a \sin (ax + b) + C$
$\sin (ax + b)$ $a \neq 0$	$-1/ a \cos (ax + b) + C$
$u' \cos u$	$\sin u + C$
$u' \sin u$	$- \cos u + C$
$u' / \cos^2 u$	$\tan u + C$
$u' / \sin^2 u$	$- \cot u + C$

9-Résolution de l'équation trigonométrique de la forme a cos x + b sin x = c (a , b et c sont des réels).

Premier cas : si l'un des réels a , b ou c est nul :
On obtient un équation trigonométrique simple à résoudre .

Deuxième cas : 1) si $a . b . c \neq 0$ avec $c^2 \leq a^2 + b^2$
On divise par a et on remplace b / a par $\tan \alpha$ où α est un angle remarquable et $\tan \alpha$ par $\sin \alpha / \cos \alpha$ on obtient une équation sous la forme $\cos x = \cos y$.

2) On pose $t = \tan x/2$
Si $a + c \neq 0$ on obtient un équation du second degré en t à résoudre .
Si $a + c = 0$ l'une des solutions est $t = c/b$.
Et dans les deux cas on retrouve x.

10-Relations métriques dans un triangle.

1)-Théorème de Pythagore généralisé.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

2)-Formules des sinus.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

3)-Expression de l'aire d'un triangle en fonctions de deux côtés et de leur angle.

$S = \frac{1}{2} bc \sin A$

$S = \frac{1}{2} ba \sin C$

$S = \frac{1}{2} ac \sin B$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$

$4RS = abc$

CHAPITRE 3.
Fonctions irrationnelles.

1- Soit (C) la courbe représentative de f : x ---- $ax + b + c\sqrt{g(x)}$
   . Le domaine de définition D de f est l'ensemble des solutions de $g(x) \geq 0$
   . Les points (x , y) de (C) tels que $g(x) = 0$ sont les points d'arrêt à tangente verticale

2- Branches infinies

g(x)	si	Alors	Commentaire
$\alpha x^2 + \beta + \gamma$	$\alpha < 0$ $\alpha > 0$	pas d'asymptote 2 asymptotes $y = px+q$	$D=[x',x'']$et$g(x')=g(x'')=0$ $P=\lim f(x)/x, q=\lim[f(x)-px]$
$\alpha x + \beta$	$\alpha \neq 0$	une direction asymptotique parabolique	de coefficient directeur α
$\dfrac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}$	$\alpha \alpha' > 0$ $\alpha \alpha' < 0$	Verticale $x=-\beta'/\alpha'$, asymptote oblique $y=ax+b+c\sqrt{\alpha/\alpha'}$ 1 asymptote verticale	

3- Le plan d'étude de f comporte les étapes suivantes :
   Domaine de définition
   Points d'arrêts
   Etude asymptotique
   Signe de la dérivée
   Tableau de variation
   Courbe représentative