

Corrigé du contrôle 2 30/10/2023
SG

Nombres Complexes

Exercice 1.

$$1) z - z' = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad (\text{B})$$

$$2) z = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+iy+1)(x+iy+1)}$$

$$z = \frac{x^2+x-ixy+iyx+iy+y^2-i^2x-i-y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$z = \frac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2} \quad (\text{C})$$

$$3) z = \frac{\cos(-\theta) + i\sin(\theta)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{i\theta}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})} \quad (\text{A})$$

$$4) |z_B - z_A| = |z_B - z_B| \text{ avec } z_A = 2i \text{ et } z_B = -4i$$

$$|z_{AB}| = |z_{BA}| \text{ alors } AB = BA \text{ donc}$$

π est à la médiatrice de $[AB]$ // à l'axe réel (B)

$$5) z^c - 1 = 4 + 3i - 1 = 3 + 3i = 3(1+i) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg(z^c - 1)^{12} = \arg\left((3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}\right)$$

$$= 12 \times \frac{\pi}{4} (2\pi) = 3\pi (2\pi) = -\pi (2\pi) \quad (\text{B})$$

Exercice 2

$$1) z' = \frac{z+i-i}{i(z+i)-1} = \frac{z}{i(z+i)-1} = \frac{z}{2i-1+i} = \frac{z}{2i} = -i$$

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$2) a) z' = \frac{x+iy-i}{xi+y-1} = \frac{(x+iy-i)(xi+y-1)}{(y-1+ix)(y-1-ix)}$$

$$z' = \frac{2xy-2x}{x^2+(y-1)^2} + i \frac{-x^2+y^2-2y+1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$x' = \frac{2x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{(y-1)^2-x^2}{x^2+(y-1)^2}$$

b) π varie sur (d) alors $y = x+1$

$$x' = \frac{2x(x+1-1)}{x^2+(x+1-1)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{(x+1-1)^2-x^2}{x^2+(x+1-1)^2}$$

$$x' = \frac{2x^2}{2x^2} - 1 \quad \text{et} \quad y' = 0 \quad \text{alors } \boxed{z' = -1}$$

$$3) a) |z| = \frac{|z-i|}{|i\bar{z}-1|} = \frac{|z-i|}{|1|\bar{z}+i|} = \frac{|z-i|}{|i|\bar{z}-i|} = \frac{|z-i|}{|z-i|} = 1$$

$$\begin{aligned} \arg(z') &= \arg(z-i) - \arg(i\bar{z}-1) \\ &= \arg(z-i) - \arg(i) - \arg(\bar{z}-i) = 2\arg(z-i) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) $|z'| = 1$ alors $\theta\pi' = 1 \Rightarrow \pi'$ varie sur le cercle de centre O et de rayon 1

$$c) \arg(z') = 2\arg(z-i) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{donc } (\vec{u}, \vec{\theta\pi'}) = 2(\vec{u}, \vec{\theta\pi}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{or } |z'| = 1 \quad \text{alors} \quad z' = i$$

$$4) a) z + \bar{z} = z + \frac{z-i}{i\bar{z}-1} = \frac{iz\bar{z} - z + z - i}{i\bar{z}-1} = \frac{i(z\bar{z}-1)}{i\bar{z}-1}$$

$$b) \theta\pi = 1 \quad \text{donc} \quad z\bar{z} = 1$$

alors $z + z' = 0$ donc M et M' symétriques par rapport à O or $M \in$ cercle de centre O alors $M' \in$ à ce cercle donc $[MM']$ diamètre du cercle de centre