SSCC Bikfaya

S6

25/11/2024

Corrigé du Premier Contrôle
Mathématiques.

Exercice I

1) $Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{3}}$; Z_n réel donc $\frac{n\pi}{3} = K\pi$ alors 1 A

$n\pi = 3K\pi$ donc $n = 3K$

2) $\left|\frac{i\bar{z}-1}{z-i}\right| = \left|\frac{i(\bar{z}+i)}{z-i}\right| = \frac{|i|\,|\overline{z-i}|}{|z-i|} = \frac{|i||z-i|}{|z-i|} = 1$ 1 B

3) $(\ln x)^2 - 2\ln x \geq 0$ et $x > 0$

$(\ln x)(\ln x - 2) \geq 0$

$\ln x - 2 = 0$

$\ln x = 2 \to x = e^2$ 1

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)^2 - \ln x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$ B

4) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^3\,dx = \left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e$

$= \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ 1 C

5) $h'(x) = \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{\frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ 1

$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \times \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{f(x)\cdot g(x)}$

$h'(1) = \frac{f'(1)\cdot g(1) - g'(1)f(1)}{f(1)\cdot g(1)} = \frac{\frac{1}{2}\times 3 - 5\times 2}{2\times 3} = \frac{\frac{3}{2} - 10}{6} = \frac{-17}{12}$

C

6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{\sqrt{4+x} - 2} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\sqrt{5} - 2}$ défini

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{\sqrt{4+x} - 2}$ 1 $\overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}} = 2$ A

Exercice II.

1) $A(z) \longrightarrow OA = |z|$

$B(\bar{z}) \longrightarrow OB = |\bar{z}| = |z|$

$C\left(\frac{z^2}{\bar{z}}\right) \longrightarrow OC = \left|\frac{z^2}{\bar{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$ Vrai

1

alors $OA = OB = OC = |z|$ donc A, B et C appartiennent au même cercle de centre O

2) $AB = |z_B - z_A| = |\bar{z} - z| = |a - ib - a - ib| = 2b$

$AC = |z_C - z_A| = \left|\frac{z^2}{\bar{z}} - z\right| = |z|\left|\frac{z}{\bar{z}} - 1\right|$ 1

$= |z| \frac{|z - \bar{z}|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|\,|z - \bar{z}|}{|z|} = |z - \bar{z}| = 2b$

Vrai

3) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)$

$= \arg\left(\frac{z - \frac{z^2}{\bar{z}}}{\bar{z} - \frac{z^2}{\bar{z}}}\right) = \arg\left(\frac{\frac{z\bar{z} - z^2}{\bar{z}}}{\frac{\bar{z}^2 - z^2}{\bar{z}}}\right)$

$= \arg\left(\frac{z\bar{z} - z^2}{\bar{z}^2 - z^2}\right) = \arg\left(\frac{(a+ib)(a-ib) - (a+ib)^2}{(a-ib)^2 - (a+ib)^2}\right)$

$= \arg\left(\frac{a^2 + b^2 - a^2 - 2aib + b^2}{a^2 - 2aib + b^2 - a^2 - 2aib + b^2}\right)$ 1

$= \arg\left(\frac{2b^2 - 2aib}{2b^2 - 4aib}\right) = \arg\left(\frac{b - ai}{b - 2ai}\right)$

$= \arg\left(\frac{(b-ai)(b+2ai)}{b^2 + 4a^2}\right) = \arg\left(\frac{b^2 + 2aib - aib + 2a^2}{b^2 + 4a^2}\right)$

$= \arg\left(\frac{2a^2 + b^2 + aib}{b^2 + 4a^2}\right) = \arg(2a^2 + b^2 + aib)$

$\tan(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{ab}{2a^2 + b^2}$ or $\tan(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = \frac{b}{a}$ Faux

4) $z' = re^{-i\theta} + \dfrac{r^2 e^{2i\theta}}{re^{-i\theta}} = \dfrac{r^2 e^{-2i\theta} + r^2 e^{2i\theta}}{re^{-i\theta}}$ (1)

$z' = r^2 2\left(\dfrac{e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}}{2}\right) \times \dfrac{1}{re^{-i\theta}} = 2re^{i\theta}\cos(2\theta)$

Vrai

Exercice III.

1) $P(2) = 8 + 2(\sqrt{2}-1)4 + 4(1-\sqrt{2})2 - 8$

$P(2) = 8 + 8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$ alors $P(z)$ est divisible par $z-2$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

2)

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8 & z-2 \\
\hline
-\ z^3 - 2z^2 & z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 \\
\quad z^2(2\sqrt{2}) + 4(1-\sqrt{2})z - 8 & \\
-\ 2\sqrt{2}z^2 - 4\sqrt{2}z & \\
\quad z(4) - 8 & \\
-\ 4z - 8 & \\
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$ (E) (1)

$P(z) = 0$: $z = 2$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta = 8 - 16 = -8 = 8i^2$

$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

3) a) $z_K = \dfrac{2 + \sqrt{2}i - \sqrt{2}}{2}$

$z_K = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$OA = 2$ $\quad OB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ donc $OA = OB$

$(\vec{u}, \vec{OK}) = (\vec{OA}, \vec{OK}) = \frac{1}{2}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{1}{2}\arg\left(\dfrac{z_{\vec{OB}}}{z_{\vec{OA}}}\right)$ (1)

$= \frac{1}{2}\arg\left(\dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}\right) = \frac{1}{2}\arg\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + 2K\pi\right] = \dfrac{3\pi}{8} + K\pi \quad (K \in \mathbb{Z})$

b) $z_K = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad |z|^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow |z| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ $\frac{1}{2}$

c) $\arg(z) = \frac{3\pi}{8}$ et $|z| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$z = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\frac{3\pi}{8})$$

$$z = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

D'où $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-2\sqrt{2}}}$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

et $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2(2-\sqrt{2})}$ $\frac{1}{2}$

Exercice IV

1) $(1-z)^n = (1+z)^n$ alors $|1-z|^n = |1+z|^n$ 1
donc $|1-z| = |1+z|$ c.à-d. $MA = MB$ où $A(-1)$ et $B(1)$
donc M varie sur la médiatrice de $[AB]$

2) $z = i\tan\alpha$ donc $(1-i\tan\alpha)^n = (1+i\tan\alpha)^n$

$\left(1 - i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n = \left(1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n \rightarrow (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

$(e^{-i\alpha})^n = (e^{i\alpha})^n \rightarrow e^{-i\alpha n} = e^{in\alpha}$ 1 $\rightarrow$

$$n\alpha = -n\alpha + 2K\pi \text{ où } K \text{ entier}$$

$$2n\alpha = 2K\pi \text{ alors } \alpha = \frac{K\pi}{n} \quad 1$$

3) les racines sont $i\tan\frac{K\pi}{n}$ où K prend $(2n)$ valeurs entières consécutives 1
alors l'équation admet $(2n)$ racines

Exercice V.

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$; $\cos\hat{A} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\hat{A} = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Aire $ABC = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\ u^2}$ ($\frac{1}{2}$)

2) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ donc $\boxed{a=\sqrt{3}\ u}$ ($\frac{1}{2}$)

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ donc $\boxed{\cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}}$ (1)

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{BC^2}{2}$ d'où $1+\sqrt{2} = AM^2 - \frac{3}{4}$

$\boxed{AM = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\ u}$ (1)

$\sin B = \frac{AH}{AB}$ donc $AH^2 = AB^2 \times \sin^2 B = AB^2(1-\cos^2 B) = \frac{1}{3}AB^2$

$AH = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{2})$ donc $\boxed{AH = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\ u.}$ (1)

Exercice VI.

1) $x^2-2x \geq 0$; $x(x-2)\geq 0$; $x \leq 0$ ou $x \geq 2$

$D_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ ($\frac{1}{2}$)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x+1+\sqrt{x^2-2x})(x+1-\sqrt{x^2-2x})}{x+1-\sqrt{x^2-2x}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2+2x}{x+1-|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{2x+1} = 2$

Donc $y=2$ est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ donc possibilité d'asymptote oblique.

$a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1+\sqrt{x^2-2x}}{x} \overset{R.H.}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}}{1} = 2$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[-x+1+\sqrt{x^2-2x}\right]\left[-x+1-\sqrt{x^2-2x}\right]}{-x-1-\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{-x-1-|x|} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Alors $y = 2x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ (1)

3) $f'(x) = 1 + \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$\sqrt{x^2-2x} + x - 1 > 0$

$\sqrt{x^2-2x} > 1 - x$

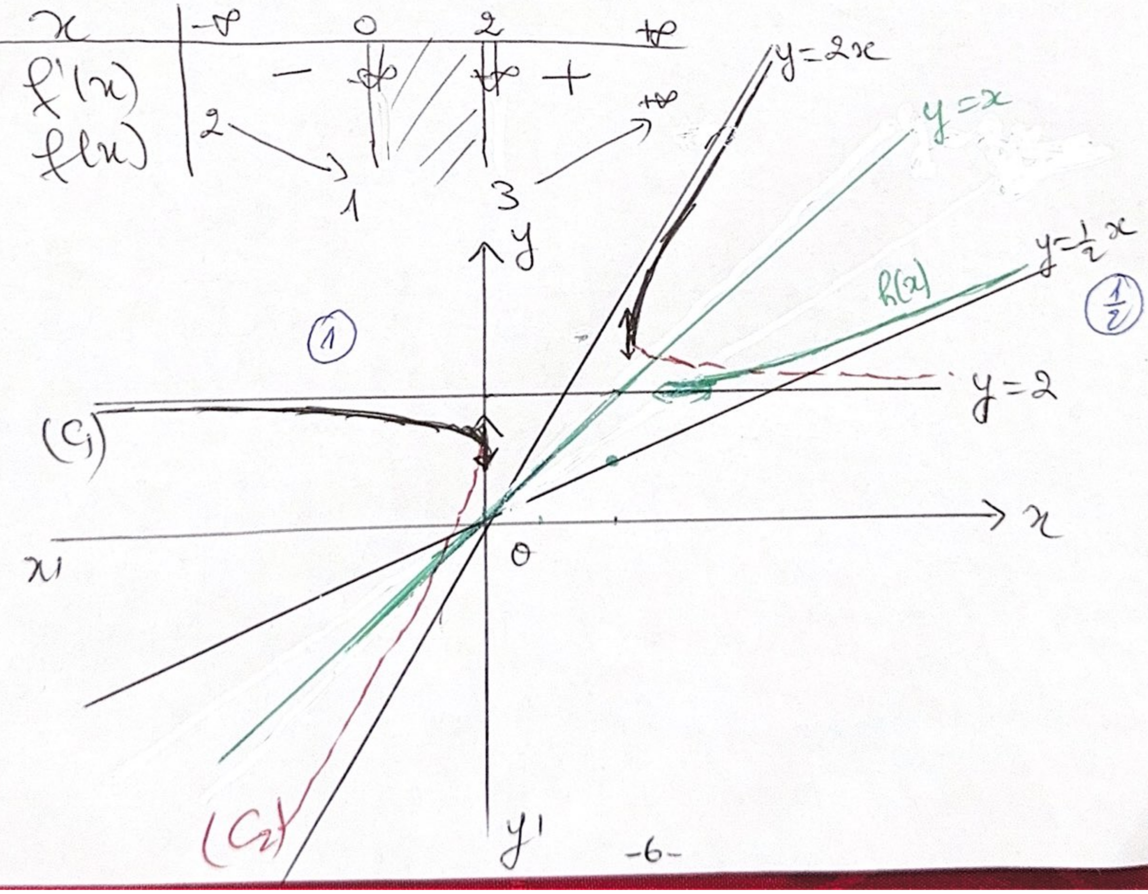
si $1-x < 0 \to -x < -1 \to x > 1$
$\to f'(x) > 0$

si $1-x > 0 \to x^2-2x > 1-2x+x^2$
$0 > 1$ non vérifié donc
$f'(x) < 0$

(1½)

x	$-\infty$		0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	1 ‖	‖ 3	↗	$+\infty$

4)



5) a) $T'(x) = \dfrac{f'(x)}{x-1+\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$W'(x) = \sqrt{x^2-2x} + \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}} = \sqrt{x^2-2x} + \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$W'(x) = 2\sqrt{x^2-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}} \Rightarrow W'(x) = 2\sqrt{x^2-2x} + T'(x)$ ½

b) $A = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x+1+\sqrt{x^2-2x}\right)dx$ 1

$A = \left[\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\left(W(x) - T(x)\right)\right]_2^3 = \dfrac{7}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})\ u^2$

6) pour $x \in [2;+\infty[$, f est continue et strictement monotone croissante donc elle définie une bijection de $[2;+\infty[$ sur $[3;+\infty[$, elle admet alors une fonction réciproque définie de $[3;+\infty[$ vers $[2;+\infty[$. 1

7) $f(x) = x+1-\sqrt{x^2-2x}$ $\qquad y-x-1 = -\sqrt{x^2-2x}$

$g(x) = x+1+\sqrt{x^2-2x}$ $\qquad y-x-1 = \sqrt{x^2-2x}$

Donc $(y-x-1)^2 = \left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2$

$y^2 + \cancel{x^2} + 1 - 2xy + 2x - 2y - \cancel{x^2} + 2x = 0$

$\boxed{y^2 - 2xy + 4x - 2y + 1 = 0}$ équation de (H) 1

Exercice VII

A- 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ ½ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad x>0$ alors $g'(x)>0$ donc $g \nearrow$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

½

3) $g(1) = 0$

Donc pour $x \in]0,1[$; $g(x) < 0$

pour $x \in]1,+\infty[$; $g(x) > 0$

pour $x = 1$; $g(1) = 0$ ½

B- 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[2x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right] = +\infty$

$x = 0$ Asymptote verticale ½ $\qquad$ Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (cours)

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) - 2x = \dfrac{1 - \ln x}{x}$ (1/2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1/x}{1} = 0$ donc $y = 2x$ Asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

b) pour $0 < x < e$; $f(x) - 2x > 0$; (C) au-dessus de (d) (1)

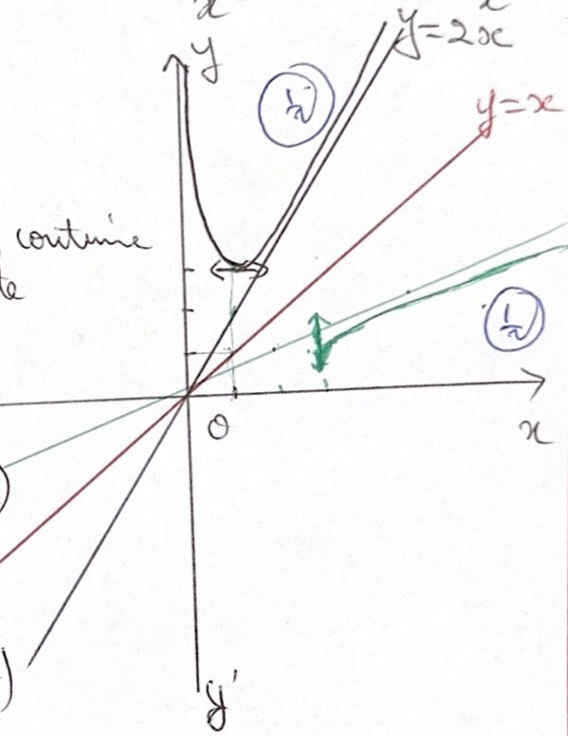
pour $x = e$; $f(x) - 2x = 0$; (C) coupe (d) en $(e; 2e)$

pour $x > e$; $f(x) - 2x < 0$; (C) en dessous de (d)

3) $f'(x) = 2 + \dfrac{-\frac{1}{x}\times x - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{2x^2 - \cancel{2} + \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(1)



5) a) sur $[1; +\infty[$; f est definie, continue strictement monotone croissante donc elle admet une fonction reciproque h. $D_h = [3; +\infty[$ (1/2) x'

b) Tracé (symétrique % à $y = x$)

c) $f'(x) = 2$; $g(x) = 2x^2$;

$\ln x = 2$; $x = e^2$ (1)

D'où le point $(2e^2 - e^{-2} ; e^2)$

C - 1) $\lim\limits_{x\to0} p(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(x^2(1+\ln x) - 3x + 2\right]$

$= \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1+\ln x}{\frac{1}{x^2}} - 3x + 2\right] \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1/x}{-2/x^3} - 3x + 2\right]$

$= \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{x^2}{-2} - 3x + 2\right] = 2$

donc p est prolongeable en $x = 0$ (1)

2) $\dfrac{p(x)}{x} = x(1 + \ln x) - 3 + \dfrac{2}{x} = x + x\ln x - 3 + \dfrac{2}{x}$ (1/2)

$f\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = \dfrac{2}{x} + \left(1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times x - 3 = \dfrac{2}{x} + x + x\ln x - 3$

le minimum de f est 3 donc $f\left(\frac{1}{x}\right) - 3 \geq 0 \to p(x) \geq 0$

3) $p(x) = 0$ pour $f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$; $\frac{1}{x} = 1$ alors $x = 1$ (1/2)