et $f'(1) = 0$ sont notés sur le graphe de f

34 1° **a)** $\lim\limits_{0} (x^2 - \ell n\, x) = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} (x^2 - \ell n\, x) = \lim\limits_{+\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{\ell n}{x^2}\right) = +\infty(+\infty) = +\infty$

b) $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\ell n\, 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) > 0$ pour $x > 0$

$\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$ possibilité d'A.O.

2° **a)** $\lim\limits_{+\infty} \left[\dfrac{1 + \ell n\, x}{x} + x - 1 - (x - 1)\right] = \lim\limits_{+\infty} \left(\cancel{1 +} \dfrac{\ell n\, x}{x}\right) = 0$.

b) $f(x) - y = 1 \cancel{+} \dfrac{\ell n\, x}{x}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x) - y$	||	$-$	0	$+$	

• pour $x \in \left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$, (C) est au-dessous de (d)

• pour $x \in \left]\dfrac{1}{e}\,; +\infty\right[$, (C) est au-dessus de (d) .

c) $x = 0$ est l'équation de l'asymptote verticale car $\lim\limits_{0} f(x) = -\infty$.

3° $f'(x) = \dfrac{-\,\ell n\, x}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2 - \ell n\, x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

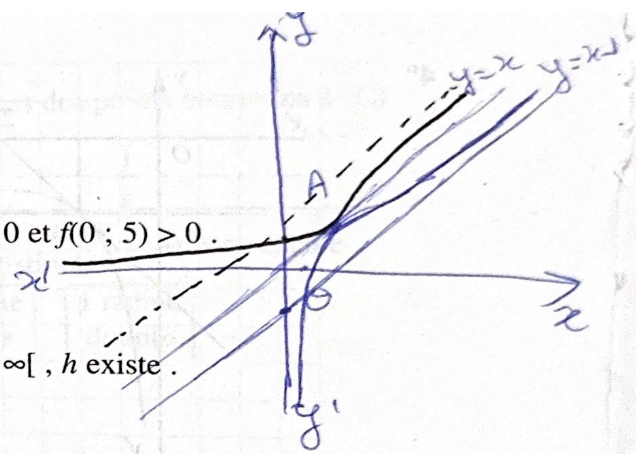
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4° $A(1\ ;\ 1)$

$(D) : y = f'(1)\,(x - 1) + f(1)\ ;\ y = x$.

$(D)\ //\ (d)$ ayant la même pente .

5° f est continue , monotone croissante avec $f(0\ ;\ 4) < 0$ et $f(0\ ;\ 5) > 0$.



6° facile .

7° **a)** f étant continue , monotone croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, h existe .

b) $D_h =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

La courbe de h est le symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la courbe (C) .

36 1° $\lim_{x \to 0} \ell n\, x = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$; $y'y$ est une asymptote à (C) .

2° $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n^2 x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\, \ell n\, x}{x} = 0$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3° $f'(x) = 1 - \dfrac{2\left(\frac{\ell n\, x}{x}\right)x - \ell n^2 x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2\, \ell n\, x + \ell n^2 x}{x^2} = \dfrac{\phi(x)}{x^2}$ avec $\varphi(x) \geqslant 1$

donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante pour tout $x \in \left]0\, ; +\infty\right[$.

4° **a)** Equation de la tangente à (C) en A : $y = f'(1)(x-1)+1 = x$

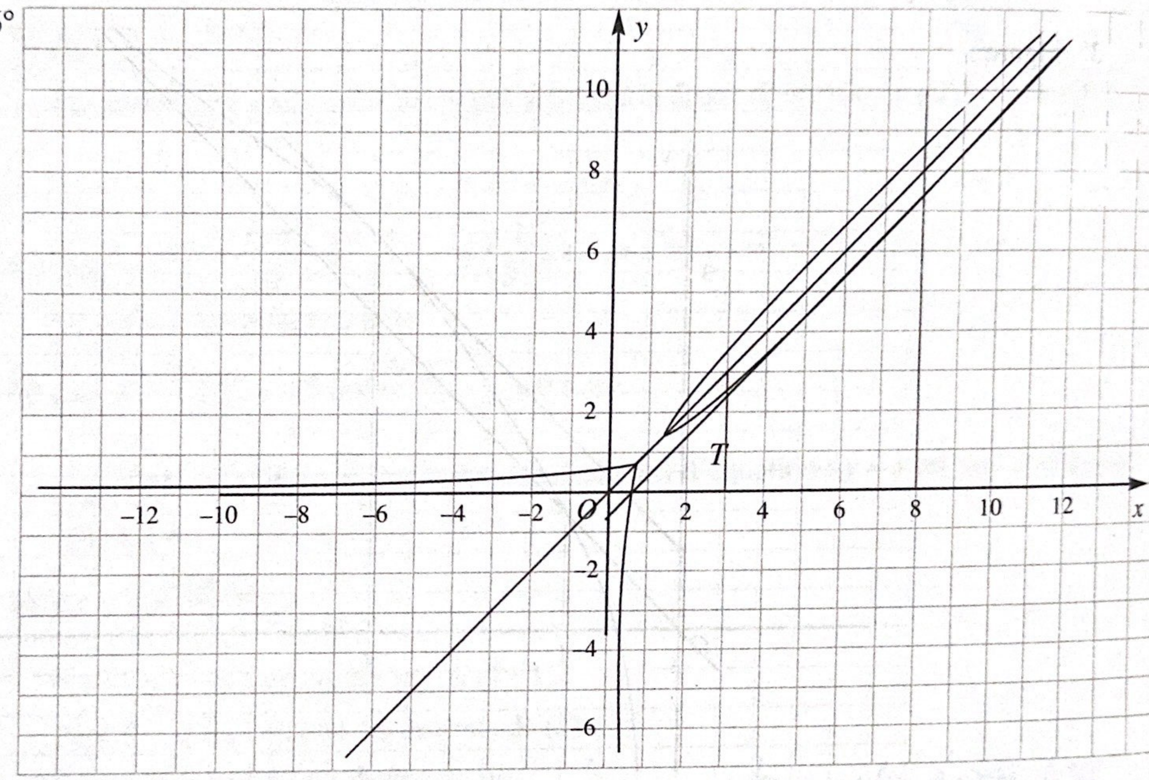
$$f(x) - x = -\frac{\ell n^2 x}{x} \leqslant 0 \text{ donc } (D) \text{ est au-dessus de } (C) \text{ pour } x \neq 1 .$$

b) $f'(e^2) = 1 - \frac{4-4}{e^4} = 1$ donc $(T) \,//\, (D)$.

5° Sur $]0\,;+\infty[$, f est continue et change de signe , donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine α mais f est strictement croissante donc α est unique .

$f(0{,}5) = -0{,}46 < 0$ $\;f(0{,}6) = 0{,}165 > 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

6°



7° (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

8° **a)** $\int_\alpha^1 \left(x - \frac{\ell n^2 x}{x}\right) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_\alpha^1 - \int_\alpha^1 u^2 u' \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell n^3 x}{3}\right)_\alpha^1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\ell n^3 \alpha}{3}$.

b) L'aire du domaine limité par (C) , $x'x$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$ est égale à l'aire du domaine limité par (C') , $y'y$ et les droites d'équations $y = \alpha$ et $y = 1$.

Donc l'aire requise A est égale à l'aire du carré de côté 1 moins 2 fois l'aire calculée dans 8a , par suite $A = \left(\alpha^2 - 2\frac{\ell n^3 \alpha}{3}\right)u^2$.

43 1° $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1+(-\infty)}{0^+} = -\infty$ alors $x = 0$ est une asymptote à (C).

2° a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{\text{R.H}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = \frac{1}{2}(+\infty) + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

$(d): y = \frac{1}{2}x$ asymptote à (C) ?

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_{(d)} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1+\ell n\, x}{x} - \frac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ell n\, x}{x} \overset{\text{HR}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0$

alors $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Intersection de (D) et (C)

$$\frac{1}{2}x + \frac{1+\ell n\, x}{x} = \frac{1}{2}x \text{ donne } \frac{1+\ell n\, x}{x} = 0$$

par suite $1 + \ell n\, x = 0$ et $\ell n\, x = -1$ d'où $x = \dfrac{1}{e}$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1+\ell n\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2e} \quad \text{et } E\left(\frac{1}{e}\,;\,\frac{1}{2e}\right).$$

3° $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (1)(1+\ell n\, x)}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1-1-\ell n\, x}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ell n\, x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2\ell n\, x}{2x^2}$

4° a) On a $f'(x) = \dfrac{h(x)}{2x^2}$ donc $f'(x)$ et $h(x)$ ont même signe ,

et com... le minimum de $h(x) = 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ par suite $f(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

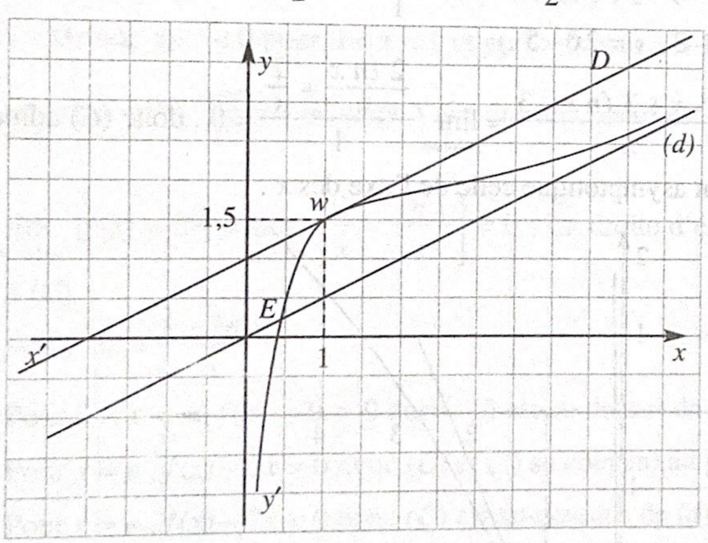
b) La pente de la tangente en w à (C) est $f'(1)$

$$f'(1) = \frac{(1)^2 - 2\,\ell n(1)}{2(1)^2} = \frac{1}{2}$$

Equation de la tangente (D) : $y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$

$f(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1+\ell n(1)}{1} = \dfrac{3}{2}$ donc (D) : $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

5°



6° $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{1+\ell n\, x}{x}\,dx$ possons $1 + \ell n\, x = u$ $\quad du = \dfrac{dx}{x}$

$$\int \frac{1+\ell n\, x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}$$

donc $A = \left[\dfrac{(1+\ell n\, x)^2}{2}\right]_1^2 = \dfrac{1}{2}\left((1+\ell n\, e)^2 - (1+\ell n\, 1)^2\right) = \dfrac{1}{2}\,(2^2-1) = \dfrac{3}{2}\,u^2$.