symétrique de (C) par ...

22 1° $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) + f(-x) = x + 1 - \dfrac{4e^x}{1+e^x} - x + 1 - \dfrac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$= 2 - \frac{4e^x}{1+e^x} - \frac{4}{1+e^x} = 2 - \frac{4(e^x+1)}{1+e^x} = -2\,.$$

Le point $I\,(0\,;-1)$ est un centre de symétrie de (C).

2° $\lim\limits_{x\to-\infty}\big[f(x) - (x+1)\big] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4e^x}{1+e^x} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big[f(x) - (x-3)\big] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^x} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$).

Les limites précédentes montrent que les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = x - 3$ sont les asymptotes de (C).

3°

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = -e^{-x}$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\left(f'(x) = \left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2\right)$

4° **a)** $\mathscr{A} = \displaystyle\int_3^m \big(f(x) - x + 3\big)dx = \int_3^m \left(4 - \frac{4e^x}{1+e^x}\right)dx$

$$= 4\Big[x - \ell n\,(1+e^x)\Big]_3^m = 4\Big[m - \ell n\,(1+e^m) - 3 + \ell n\,(1+e^3)\Big]$$

$$= 4\Big[\ell n\, e^m - \ell n\,(1+e^m) - \ell n\, e^3 + \ell n\,(1+e^3)\Big]$$

$$= 4\,\ell n\,\frac{e^m}{1+e^m} + 4\,\ell n\left(\frac{1+e^3}{e^3}\right).$$

b) $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathscr{A} = 4\,\ell n\left(\dfrac{1+e^3}{e^3}\right)$ car $\lim\limits_{m\to+\infty} \ell n\,\dfrac{e^m}{1+e^m} = \lim\limits_{m\to+\infty} \ell n\,1 = 0$.

23 1° $f(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \dfrac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] = 0$, donc (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 1$, donc (D') d'équation

$y = 2x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, donc $y'y$ est asymptote à (C) .

2° On démontre que $f(-x) + f(x) = 1$.

x	$-\infty$		$-\ell n\, 2$		0		$\ell n\, 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\ell n\, 2 - 1$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\ell n\, 2 + 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3° L'équation équivaut à $f(x) = m$.

- Pour $m > 2\ell n\, 2 + 2$ ou $m < -2\ell n\, 2 - 1$, il y a deux racines distinctes .
- Pour $m = 2\ell n\, 2 + 2$ et $m = -2\ell n\, 2 - 1$, il y a une racine double .
- Pour $-2\ell n\, 2 - 1 < m < 2\ell n\, 2 + 2$, il n'y a pas de racines .

4° $S_\alpha = \displaystyle\int_{\ell n 2}^{\ell n \alpha} \left[2x + \frac{e^x}{e^x - 1} - (2x + 1) \right] dx = \int_{\ell n 2}^{\ell n \alpha} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - 1 \right) dx = \Big[\ell n(e^x - 1) - x \Big]_{\ell n 2}^{\ell n \alpha}$

$= \ell n \dfrac{2(\alpha - 1)}{\alpha}$.

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S_\alpha = \ell n\, 2$.

28 1° facile.

2° $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2e^x}{e^x+1} - 1\right] = 1$: La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 1 = -1$: La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale .

3° $f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x+1) - 2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$; $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

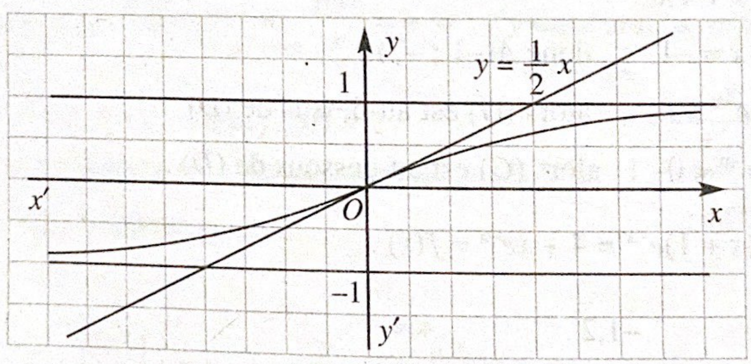
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

4° $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}(x - 0) + 0$

$y = \dfrac{1}{2}x$.

5°



6° $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \Big[2\,\ell n\,(e^x+1) - x\Big]_0^1 = 2\,\ell n\,(e+1) - 1 - 2\,\ell n\,2$ unités d'aires .

7° **a)** f est continue et strictement croissante . f^{-1} existe dans $]-1\,;1[$ et $f^{-1}(x) = \ell n\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

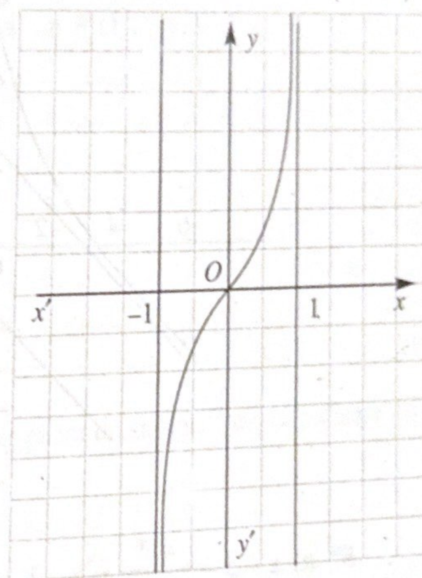
b) Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c) $f^{-1}(x) > \ell n\ 2$

$$\frac{1+x}{1-x} - 2 > 0$$

$\dfrac{3x-1}{1-x} > 0$ comme $1 - x > 0$ car $x \in]-1\,;1[$.

Il suffit : $3x - 1 > 0$; $x > \dfrac{1}{3}$ soit $x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$.



d) $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ à cause de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.