13 **1°** Soit h l'homothétie de centre G

et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

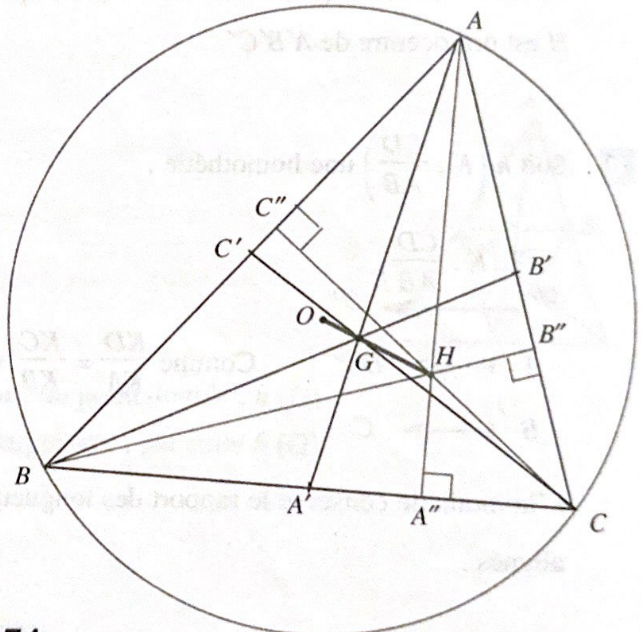
$$\mathscr{P} \xrightarrow{\quad h \quad} \mathscr{P}$$

$$\begin{aligned} A &\longmapsto A' \\ B &\longmapsto B' \\ C &\longmapsto C' \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \; .$$



Comme $(OA') \perp (BC)$ alors $(OA') \perp (B'C')$ car $(B'C') \,//\, (BC)$.

O est donc l'horthocentre du triangle $A'B'C'$ et comme l'homothétie conserve l'orthocentre (voir n 8) alors $h(H) = O$, par suite $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ ou $2\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GH}$

$-2\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{GH}$; $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}$.

D'où $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

O, G, H sont donc alignés.

2° Le cercle circonscrit à $A'B'C'$ de centre O' est l'image du cercle circonscrit à ABC et de centre O ; $h(O) = O'$, par suite $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$

$-2\overrightarrow{O'G} = \overrightarrow{OG}$; $-2\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG}$; d'où : $2\overrightarrow{OO'} = 3\overrightarrow{OG}$.

Les trois points O, O', G sont alignés.

3° $C\left(O, R\right)$ est le cercle circonscrit à ABC.

$C'\left(O', \frac{R}{2}\right)$ est le cercle circonscrit à $A'B'C'$.

Il y a deux homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ qui transforment $C(O, R)$ en $C'\left(O', \frac{R}{2}\right)$.

Leurs centres doivent diviser $[OO']$ dans le rapport $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Comme $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{OH} = 2(\overrightarrow{HO'} - \overrightarrow{HO}) = 2\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO'}$

$-\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO'}$; $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$, O' est donc le milieu de $[HO]$.

Par suite l'homothétie $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ transforme $C(O, R)$ en $C'\left(O', \frac{R}{2}\right)$

$2\overrightarrow{OO'} = 3\overrightarrow{OG}$ ou $2\overrightarrow{GO'} - 2\overrightarrow{GO} = 3\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{GO'}$ ou bien $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$

L'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme $C(O, R)$ en $C'\left(O', \frac{R}{2}\right)$.

4° $\mathscr{P} \xrightarrow{h\left(H, \frac{1}{2}\right)} \mathscr{P}$

$A \longmapsto \alpha$ milieu de $[AH]$

$B \longmapsto \beta$ β milieu de $[BH]$

$C \longmapsto \gamma$ γ milieu de $[CH]$.

Comme A, B, C appartiennent à $C(O, R)$, alors α, β, γ appartiennent à l'image de $C(O, R)$ soit $C'\left(O' ; \frac{R}{2}\right)$.

On a aussi A', B' et C' trois points de $C'\left(O', \frac{R}{2}\right)$.

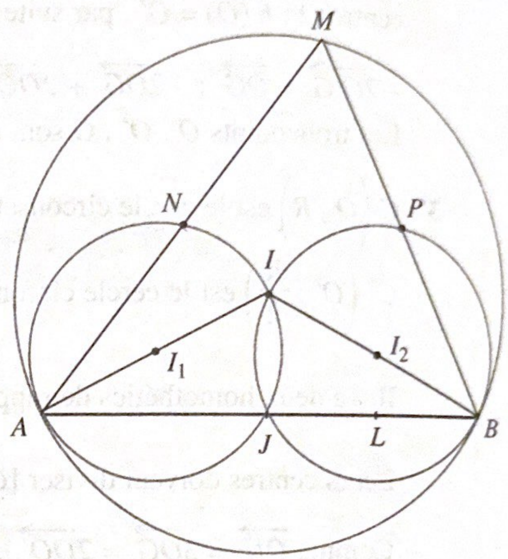
O' étant le milieu de $[OH]$. Appelons A'' le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Dans le trapèze $OHA''A'$, la médiatrice de $[A'A'']$ passe par le milieu O' de $[OH]$ par suit $O'A' = O'A''$

A'' appartient donc à $C'\left(O', \dfrac{R}{2}\right)$

De même les pieds B'' et C'' des hauteurs issues respectivement de B et C dans le triangle ABC appartiennent à $C'\left(O' ; \dfrac{R}{2}\right)$. A', B', C', α, β, γ, A'', B'' et C'' sont sur $C\left(O' ; \dfrac{R}{2}\right)$.

14 1° $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$



• Le point N est l'image du point M par l'homothétie $h\left(A ; \dfrac{1}{2}\right)$ soit L_1 le milieu de $[AI]$ Le lieu de N est le cercle de centre I_1 et de rayon $\dfrac{r}{2}$.

• $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BM}$.

Le point P est l'image du point M par l'homothétie $h'\left(B ; \dfrac{1}{2}\right)$.

Soit I_2 le milieu de $[BI]$. Le lieu de P est le cercle de centre I_2 et de rayon $\dfrac{r}{2}$.

2° Soit J le milieu de $[AB]$. G est un point de $[MJ]$ et $\overrightarrow{JG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{JM}$. G est l'image de M par l'homothétie $h''\left(J ; \dfrac{1}{3}\right)$. Soit I_3 le point de $[JI]$ tel que $\overrightarrow{JI_3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{JI}$.

Le lieu de G est donc le cercle de centre I_3 et de rayon $\dfrac{r}{3}$.

3° Soit L le barycentre de la famille $\{(B ; 2), (A ; 1)\}$.

L est défini par $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{3}$.

H est donc le barycentre de la famille $\{(L ; 3), (M ; 3)\}$.

H est donc le milieu de $[LM]$, c'est-à-dire :

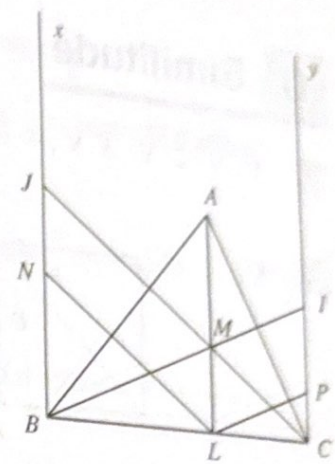
$\overrightarrow{LH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{LM}$.

H est donc l'image de M par l'homothétie $h'''\left(L, \dfrac{1}{2}\right)$.

Soit I_4 le milieu de $[LI]$.

Le lieu de H est le cercle de centre I_4 et de rayon $\dfrac{r}{2}$.

15 Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{BC}{BL}$.



$$\mathcal{P} \xrightarrow{h} \mathcal{P}$$

$L \longmapsto C$

$(AL) \longmapsto (Cy)$ D'où $h(M) = I$

$M \longmapsto I$ Comme $(CJ) \parallel (LN)$ alors $h(N) = J$.

$N \longmapsto J$

Par suite (MN) et (IJ) sont parallèles car (IJ) est l'image de (MN) par h.

Soit h' l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{CB}{CL}$.

On a de même :

$$\mathcal{P} \xrightarrow{h'} \mathcal{P}$$

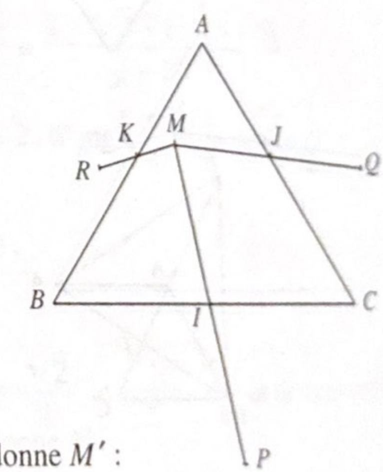
$L \longmapsto B$

$M \longmapsto J$

$P \longmapsto I$ (PM) est donc parallèle à (IJ)

Par suite M, N, P sont alignés.

16 1° Soit les deux homothéties $h\left(G, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $h'(M, 2)$ où G est le centre de gravité du triangle ABC



$$\mathcal{P} \xrightarrow{h\left(G, -\frac{1}{2}\right)} \mathcal{P} \xrightarrow{h'(M, 2)} \mathcal{P}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \longmapsto & I & \longmapsto & P \\ B & \longmapsto & J & \longmapsto & Q \\ C & \longmapsto & K & \longmapsto & R \end{array}$$

La composée $h'(M\,;2) \circ h\left(G\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ est une homothétie $h''(M'\,;-1)$. On applique la formule qui donne M' :

$$\overrightarrow{GM'} = \frac{1-2}{1+1}\,\overrightarrow{GM} \quad \text{soit } \overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GM}.$$

h'' est une symétrie de centre M'.

Par suite $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont le même milieu M'.

2° $\overrightarrow{GM'} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{GM}$ M' est donc l'image de M par l'homothétie $h\left(G\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.