14 1° f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

fog et gof sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $fog(x) = (x + 2)^2$ et $gof(x) = x^2 + 2$.

2° • $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

• ***fog*** : Il faut que $g(x)$ appartienne à D_f ; $g(x) \neq 1$; soit $x \neq 1$. fog est donc définie sur $\mathbb{R} - \left\{1 ; -\frac{1}{2}\right\}$ par $fog(x) = \dfrac{3x + 3}{-x + 1}$.

• ***gof*** : Il faut que $f(x)$ appartienne à D_g ; $f(x) \neq \frac{-1}{2}$; soit $x \neq \frac{-1}{3}$. gof est donc définie sur $\mathbb{R} - \left\{1 ; -\frac{1}{3}\right\}$ par $gof(x) = \dfrac{3x - 1}{3x + 1}$.

15 1° $f(0) = 3$, $f(2) = -3$, $g(0) = 5$, $g(2) = -5$.

f est une fonction polynôme , elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

Comme $f(0).f(2) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet , au moins , une racine comprise entre 0 et 2 .

On raisonne de la même manière pour $g(x) = 0$.

2° $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ et $g(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$. La vérification est immédiate .

16 f est une fonction polynôme , elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0\,;\,1]$.
$f(0) = 1$ et $f(1) = -1$, par suite $f(0).f(1) < 0$.
Il en résulte que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre 0 et 1 .

17 $D_f = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{\frac{5}{3}}\right[\cup \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}\,;\,\sqrt{\frac{5}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{5}{3}}\,;\,+\infty\right[$.

f est une fonction rationnelle , elle est donc continue sur tout intervalle de son domaine de définition , et en particulier sur $]2\,;\,3[\subset \left]\sqrt{\frac{5}{3}}\,;\,+\infty\right[$.
$f(2).f(3) < 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre 2 et 3 .

18 1° $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} (3x + 3) = 6$. L'équation de la tangente en ce point est $y = 6x - 3$.
2° De même .

19 1° f est le rapport de deux fonctions dérivables ; son dénominateur est non nul pour $x = 1$. Par suite f est dérivable en 1 et on a , pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$:

$f'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$; alors $f'(1) = -4$.

L'équation de la tangente est : $y = -4x + 1$.

2° f est définie sur $[1\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$. Sa courbe représentative admet en 1 une demi-tangente verticale .

4° f n'est pas définie pour $x = 1$, par suite non dérivable en ce point .

20 Toutes les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (Facile) .

21 4° f est dérivable pour $\sin 2x \neq 0$, soit $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)\sin 2x - 2\cos 2x(\sin x + \cos x)}{(\sin 2x)^2} .$$

22 1° f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{-3}{2x^2} = -4$. Soit $x^2 = \dfrac{3}{8}$; d'où $x = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Il y a donc deux points de la courbe répondant à la question .

3° f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x = -4$; $\sin x = 4$ ce qui est impossible car $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.