



Année Académique 2024-2025

Matière: Mathématiques

Classe: S2S

Date: Mai 2025

Collège SSCC Bickfaya

Chapitre 15 : Produit scalaire dans l'espace. Tome 1

Objectifs

1-Donner les propriétés du produit scalaire dans le plan (rappel).

2-Donner les propriétés du produit scalaire dans l'espace.

1. Le produit scalaire dans le plan (rappel).

1) Définition

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$) est le réel $xx' + yy'$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\text{Remarque : } \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 = u^2$$

Application: Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, On donne les points A(2 ;3) ;

B(-1 ;2) ;C(0 ;2) et D(3 ;-5). Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ et $\vec{AB}^2$

Solution : $\vec{AB}(-3; -1)$ et $\vec{CD}(3; -7)$ alors $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = xx' + yy' = -3 \times 3 + (-1) \times (-7) = -9 + 7 = -2$

$$\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = x^2 + y^2 = 9 + 1 = 10$$

2) Propriétés

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (le produit scalaire est commutatif)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition)

3. $(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)

4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

6. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Remarque: La relation (4) est équivalente à $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\text{Soit } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

La relation (5) est équivalente à $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\text{Soit } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

En appliquant ce résultat à un triangle quelconque ABC avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

on obtient : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Autre expression du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$$

α étant l'angle géométrique formé par les deux vecteurs.

Conséquences :

a) Signe du produit scalaire

si α est aigu ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) alors $\cos \alpha > 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

si α est obtus ($\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$) alors $\cos \alpha < 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

si α est droit ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) alors $\cos = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si l'un au moins des vecteurs est nul ou s'ils sont orthogonaux.

Application: Dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis par $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(-8; 6)$.

Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Solution : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 3 \times (-8) + 4 \times 6 = -24 + 24 = 0$ par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

b) Expression du cosinus de l'angle de deux vecteurs :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Si $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$, on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

c) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB} \quad \text{avec } O, A \text{ et } B \text{ alignés.}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \quad \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OB} \text{ sont de même sens}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OA \times OB \quad \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OB} \text{ sont de sens opposés}$$

d) Caractérisation du produit scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs ne change pas si on remplace l'un d'eux par son projeté orthogonal sur l'autre. (ou sur un axe de même direction que l'autre).

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = OA \cdot \overline{OH} \quad H \text{ étant le projeté de } B \text{ sur } (OA)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \cdot \overline{AH} \quad H \text{ étant le projeté de } C \text{ sur } (AB)$$

Voir les link: <https://youtu.be/xSHFrdbby7Zg>

2. Le produit scalaire dans l'espace.

1) Définition

L'angle de deux vecteurs de l'espace est un angle géométrique, il appartient à $[0, \pi]$.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$) est le réel $xx' + yy' + zz'$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ avec } \vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ et } H \text{ étant le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB).$$

2) Propriétés

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (le produit scalaire est commutatif)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition)

3. $(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)

4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

6. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Cas particulier: Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *deux vecteurs colinéaires* :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \times v \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -u \times v \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens opposés}$$

3) Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si le vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \quad \text{ou} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4) Orthogonalité, distances et angles

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

Si A et B sont deux points de l'espace alors $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

5) Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

C'est le plan (P) passant par A et perpendiculaire à $\vec{u}$. $\vec{u}$ est un vecteur normal à (P).

N.B. Si [AB] est un segment donné, (P) est le plan médiateur de [AB] alors (P) perpendiculaire à [AB] et passe par I milieu de [AB].

Soit $M(x, y, z)$ un point variable de (P) alors $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Ou bien soit $M(x, y, z)$ un point variable de (P) alors $AM = BM$ ou $AM^2 = BM^2$

6) Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

C'est la sphère de diamètre [AB].

L'équation est de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + r = 0$

A travailler dans le livre page 305 les numéros :

1,2,3,4,5,7,8 9,10,12,13,15 16,17,18 I, III