



Année Académique 2024-2025

Matière: Mathématiques

Classe: S2S

Date: Avril 2025

## **Collège SSCC Bickfaya**

# **Chapitre 14: Vecteurs et repère de l'espace. Tome 1**

## Objectifs

- 1-Définir un vecteur dans l'espace.
- 2-Définir des vecteurs colinéaires et des vecteurs coplanaires.
- 3-Définir bases et repères dans l'espace.
- 4-Déterminer dans l'espace les coordonnées d'un point, d'un vecteur.
- 5-Définir des vecteurs colinéaires et des vecteurs coplanaires dans l'espace.
- 6-Donner les formules de translation d'axes.

# 1. Vecteurs de l'espace.

*Toute propriété en géométrie plane s'applique dans tout plan de l'espace.*

Un vecteur  $\vec{u}$  de représentant  $\overrightarrow{AB}$  possède une direction, un sens et un module.

Un vecteur nul noté  $\vec{0}$  a comme module 0 ( $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ )

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  alors ABDC est un parallélogramme.

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.

Somme de deux vecteurs :  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$  avec I milieu de [AB].

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \text{ (Règle du parallélogramme)}$$

Produit d'un vecteur par un réel :  $\alpha \vec{V} = \vec{W}$  ;  $\vec{W}$  a même direction de  $\vec{V}$

Si  $\alpha > 0$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  de même sens

Si  $\alpha < 0$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  de sens contraire

$$\|\vec{W}\| = |\alpha| \times \|\vec{V}\|$$

Propriétés :  $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$        $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}$$

$$\alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha \beta) \vec{u}$$

## 2. Vecteurs colinéaires.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires lorsque  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Si  $\alpha > 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens

Si  $\alpha < 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire

--N.B. Un vecteur directeur  $\vec{u}$  d'une droite ( D ) est un vecteur non nul ayant la même direction que ( D ). (A,  $\vec{u}$ ) est une droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . M est un point variable de ( D ) alors  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

## 3. Vecteurs coplanaires.

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires lorsque deux de ses vecteurs sont colinéaires ou bien il existe  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

## 4. Plan défini par trois points non alignés.

Le plan défini par trois points non alignés A,B et C, note (ABC) est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

On dit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).-

## 5. Bases et repère de l'espace.

Droite (D) : Base :  $\vec{V} \neq \vec{0}$  ;  $\vec{V}$  est une base de vecteurs

Repère (O ;  $\vec{V}$ ) O point de (D),  $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{V}$  pour tout point M de (D).

Plan (P) : Base : deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tel que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de direction parallèle à (P)

Repère (O ;  $\vec{u}, \vec{v}$ ) O point de (P),  $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$  pour tout point M de (P).

Espace ( $\varepsilon$ ) : Base : trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  tel que  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  non coplanaires

Repère (O ;  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ) O point de ( $\varepsilon$ ),  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$  pour tout point M de ( $\varepsilon$ )  
d'axes (O ;  $\vec{u}$ ) ; (O ;  $\vec{v}$ ) ; (O ;  $\vec{w}$ ) .

Repères particuliers : Soit le repère (O ;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) il est dit ;

\*orthogonal si  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux deux à deux. ex: Dans le pavé droit ABCDEFGH, le repère (A ;  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ ) est orthogonal.

\*orthonormal si  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux deux à deux et ils sont de même norme. ex: Dans le cube ABCDEFGH, le repère (A ;  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ ) est orthonormal.

## 6. Coordonnées d'un point de l'espace.

A tout point M de l'espace, on peut associer un triplet  $(x, y, z)$  de  $R^3$  et un seul dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad x \text{ l'abscisse de } M, y \text{ l'ordonnée de } M, z \text{ la cote de } M$$

## 7. Comment placer un point M dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit à placer le point M  $(x, y, z)$  dans l'espace.

Par le point A de  $(O, \vec{i})$  avec  $\overline{OA} = x$  on mène une parallèle à  $(O, \vec{j})$

Par le point B de  $(O, \vec{j})$  avec  $\overline{OB} = y$  on mène une parallèle à  $(O, \vec{i})$

Ces deux parallèles se coupent en M'

Soit le point C de  $(O, \vec{k})$  avec  $\overline{OC} = z$ . Par le point M' on construit le point M tel que  $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OC}$  par suite

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

## 8. Coordonnées d'un vecteur de l'espace.

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace et M un point tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  Si les coordonnées de M sont x, y et z alors

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad x, y \text{ et } z \text{ sont appelées les coordonnées ou les composantes scalaires de } \vec{u}$$

## 9. Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ .

Soit  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace. A et B deux points donnés tel que A  $(x_A, y_A, z_A)$  et B  $(x_B, y_B, z_B)$

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont :  $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Si A et B sont confondus alors  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  et  $\vec{0}(0,0,0)$  vecteur nul.

## 10. Vecteurs égaux.

Si  $\vec{u}(x, y, z) = \vec{v}(x', y', z')$  alors  $x = x', y = y'$  et  $z = z'$

## 11. Produit d'un vecteur par un réel.

Si  $\vec{u}(x, y, z)$  alors  $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

## 12. Vecteurs colinéaires.

Si  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  sont colinéaires ssi il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\vec{v} = \alpha \vec{u} : x' = \alpha x ; y' = \alpha y ; z' = \alpha z$

$$\text{alors } \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \alpha$$

### 13. Coordonnées d'une somme de deux vecteurs.

Soit  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère . Si  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  alors  $\vec{u} + \vec{v} (x + x', y + y', z + z')$

#### a) Coordonnées du milieu d'un segment:

I milieu de [AB] :  $I ( \frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2} )$   $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$

#### b) Coordonnées du centre de gravité d'un triangle:

G centre de gravité du triangle ABC :

$$G ( \frac{x_A+x_B+x_C}{3} ; \frac{y_A+y_B+y_C}{3} ; \frac{z_A+z_B+z_C}{3} )$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

### 14. Vecteurs coplanaires.

Soit  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère . Si  $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$  et  $\vec{w}(x_3, y_3, z_3)$ . Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$ , soit :  $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$

$$y_1 = \alpha y_2 + \beta y_3$$

$$z_1 = \alpha z_2 + \beta z_3$$

## 15. Translation d'axes.

Soit dans l'espace deux repères  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(O' ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de même base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le deuxième repère est le translate du premier par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OO'}$ . On désigne par  $(a, b, c)$  les coordonnées de  $O'$  dans  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $M$  un point quelconque de l'espace dont les coordonnées sont  $(x, y, z)$  dans  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(x', y', z')$  dans  $(O' ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

La relation de Chasles permet d'écrire :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$  qui se traduit par :  $x = a + x'$

$$y = b + y'$$

$$z = c + z'$$

Les coordonnées d'un vecteur ne changent pas en passant d'un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à un repère  $(O' ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de même base.

Voir le link:

[https://youtu.be/\\_VUduQIFLw](https://youtu.be/_VUduQIFLw)

<https://youtu.be/-qJo9EjM4nc>

## *Exercices.*

A travailler dans le livre page 288 les numéros :

1, 2(1), 4, 6, 7, 8, 9, 11, 11, 12,

13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23,

24, 26, 29, 30, I, II, III