Collège des Sœurs des Saints Cœurs, Bickfaya

Année académique 2024-2025
Matière: Mathématiques
Classe: S2S
Date: Mai 2025

Chapitre 13 : Orthogonalité dans l'espace. Tome 1

Préparé par : **Mme Mirna Achkar**

Objectifs ***:Rappeler la perspective cavalière - Rappeler les propriétés des plans et droitesdans l'espace - Définir le parrallélisme dans l'espace - Définir l'orthogonalité dans l'espace – Définir l'angle de deux droits, l'angle d'une droite et d'un plan, le plan médiateur et le plan bissecteur -***

A. Rappel.

1.Règles de la perspective cavalière.

Les lignes vues sont représentées en traits pleins.

Les lignes cachées sont représentées en pointillé.

Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles. (conservation du parallélisme)

Tout segment situé dans un plan frontal est représenté en vraie grandeur.

Tout angle droit est représenté dans un plan frontal par un angle droit.

Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment tracé. (conservation du milieu)

Le rapport des segments de même direction est conservée.

Un cercle est représenté dans un plan non frontal par une ellipse.

Un rectangle est représenté dans un plan non frontal par un parallélogramme.

2.Quelques solides usuelses perspective cavalière.

Cube.

Parallèlipipède.

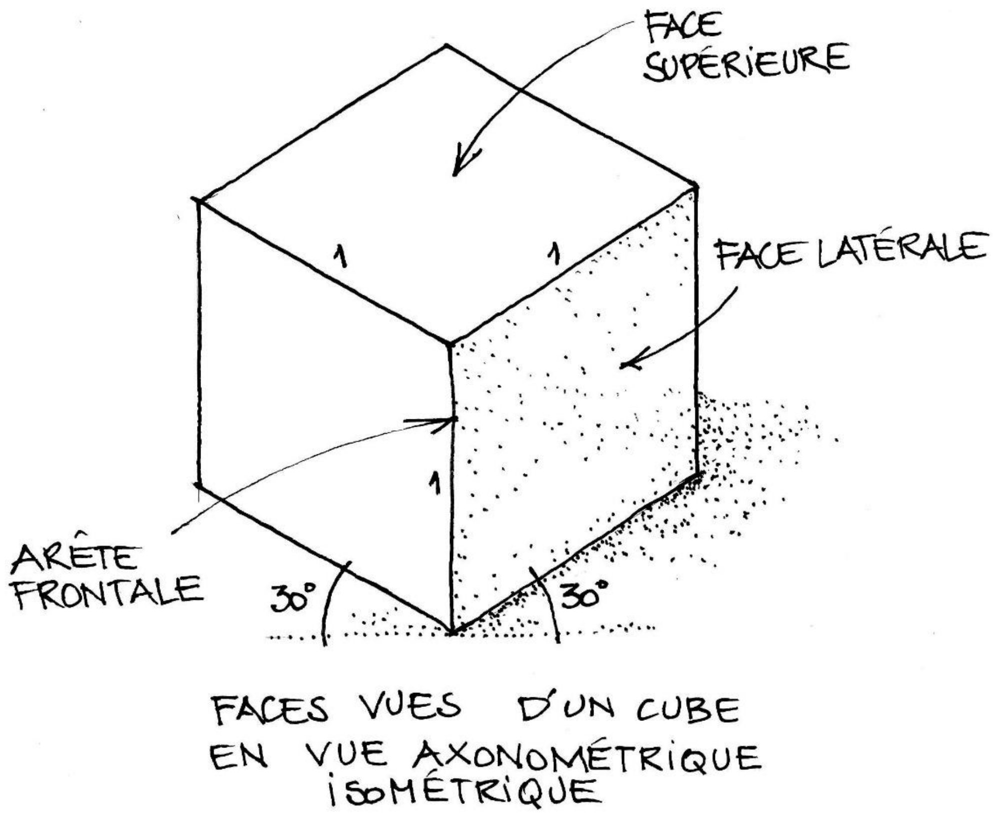
Tétraèdre.

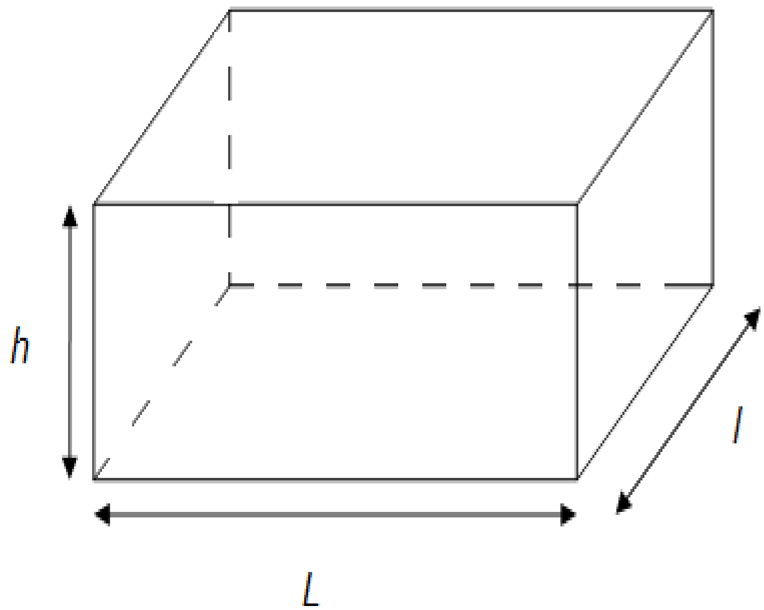
Sphère.

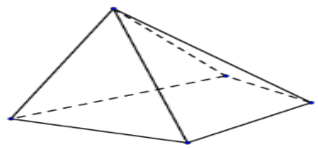
Cône de révolution.

Cylindre de révolution.

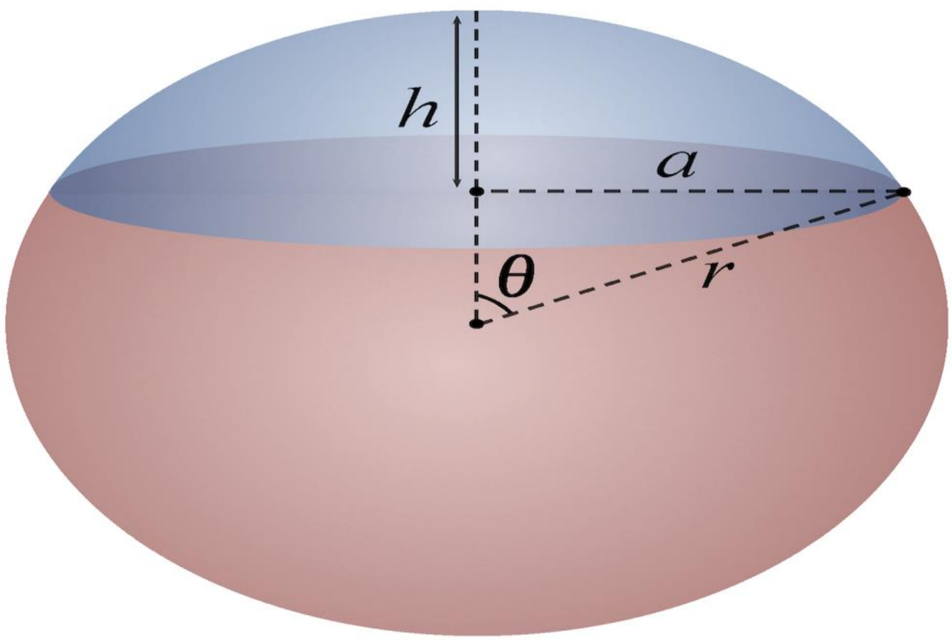
Pyramide.



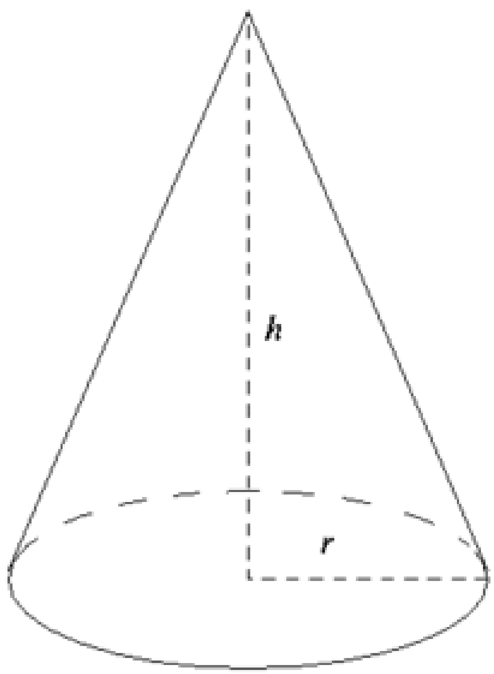

h
l
L

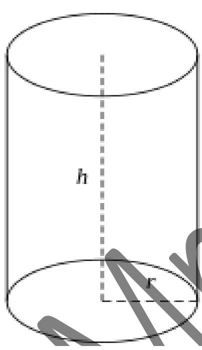


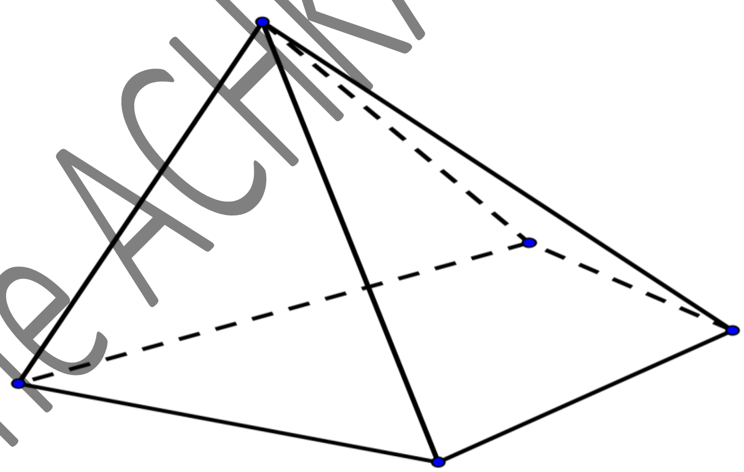
[This Photo](#) by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA-NC](#)



[This Photo](#) by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA](#)


h
r


h
r



B. Droites et plans dans l’espace.

I.Règles de base.

Tous les résultats de la géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l’espace.
Par deux points distincts A et B de l’espace passe une droite et une seule notée (AB).
Par trois points non alignés A, B et C de l’espace passe un plan et un seule noté (ABC).
Deux points appartenant à un même plan sont dits coplanaires.
Des droites contenues dans un même plan sont dites coplanaires.
Si A et B sont deux points de l’espace, la droite (AB) est contenue dans tous les plans passant par A et B.

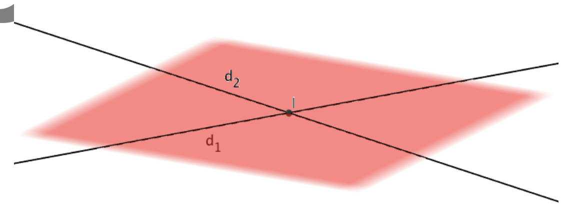
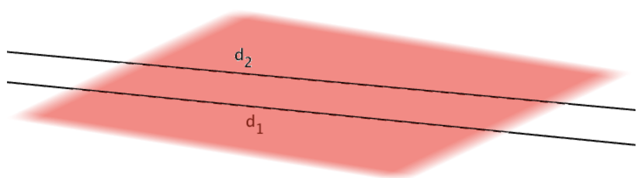
II.Détermination d’un plan.

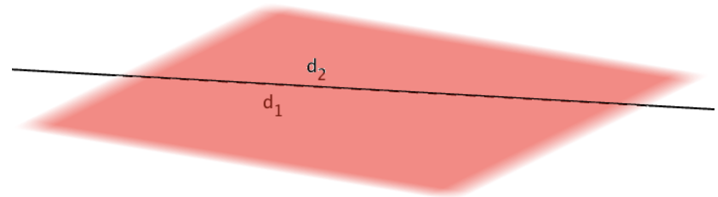
Un plan peut être déterminé par :
*Trois points non alignés.
*Une droite et un point n’appartenant pas à cette droite.
*Deux droites sécantes.
*Deux droites parallèles.

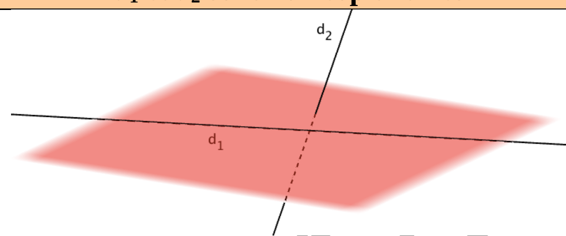
III.Positions relatives de droites et de plans

1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

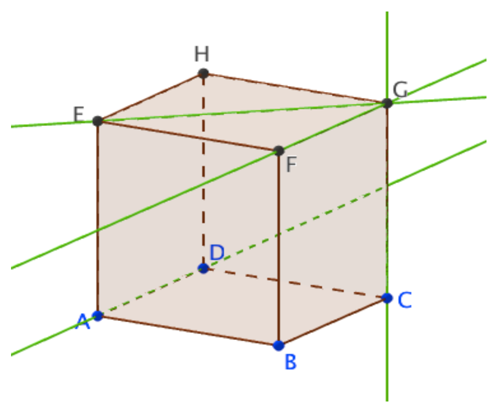
***d_1* et *d_2* sont coplanaires**	
d_1 et *d_2* sont secants	
d_1 et *d_2* sont parallèles	 *d_1* et *d_2* sont strictement parallèles

	 d_1 et d_2 sont confondues

d_1 et d_2 sont non coplanaires


Exemple :

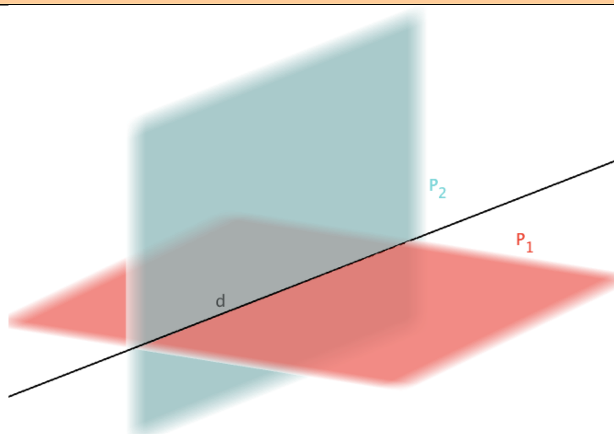
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



2) <u>Positions relatives de deux plans</u>

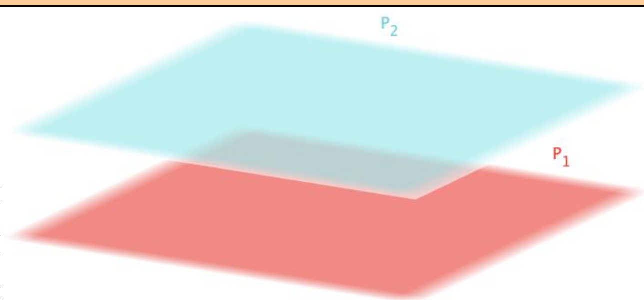
<u>Propriété :</u> Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants

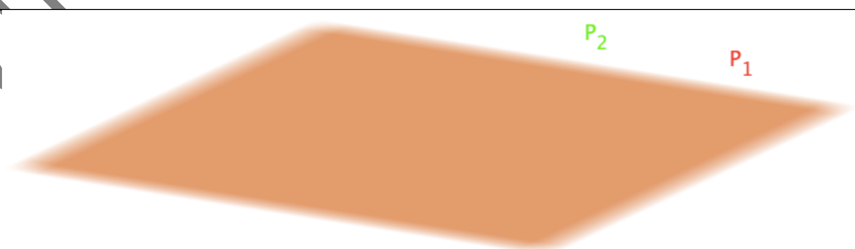


P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles

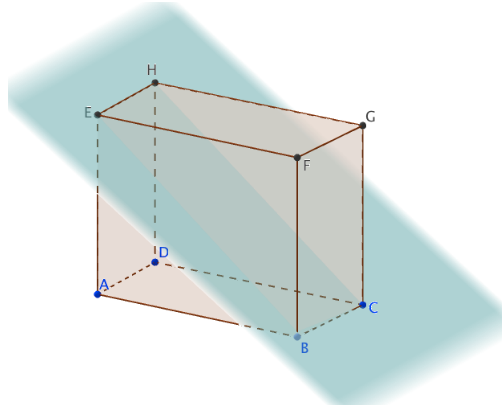


P_1 et P_2 sont strictement parallèles



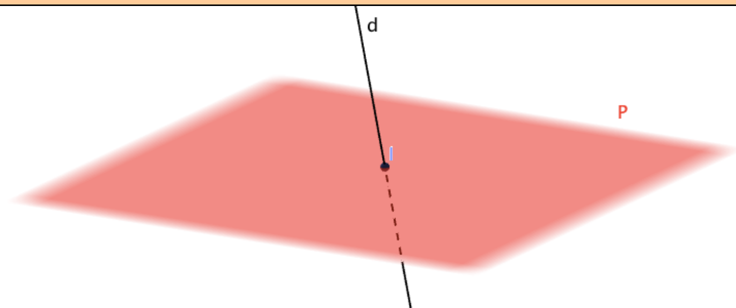
P_1 et P_2 sont confondus

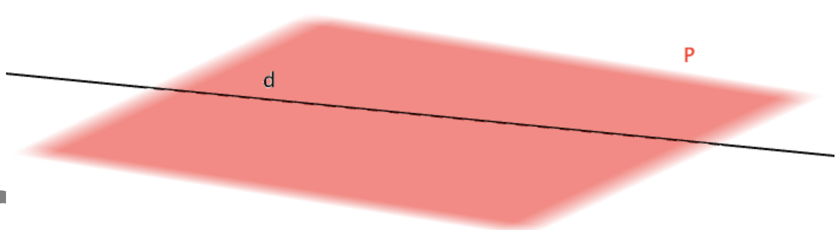
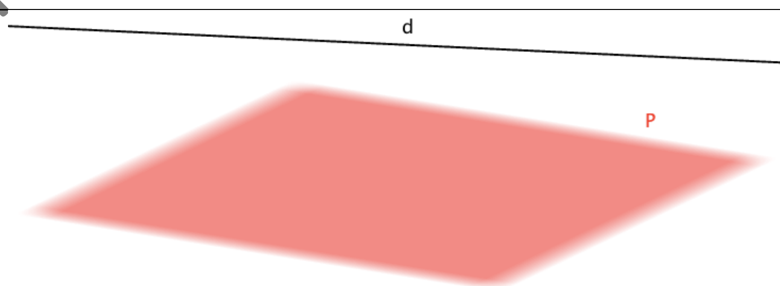
Exemple :
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

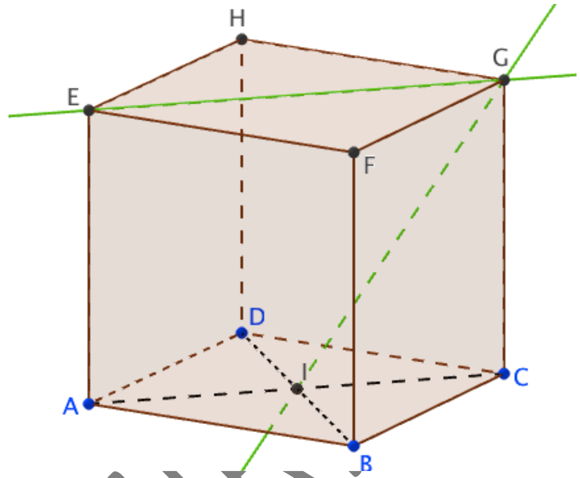
Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

***d* et *P* sont secants**

d et *P* sont sécants en un point *I*

***d* et *P* sont parallèles**

d est incluse dans *P*

d et *P* sont strictement parallèles

Exemple :

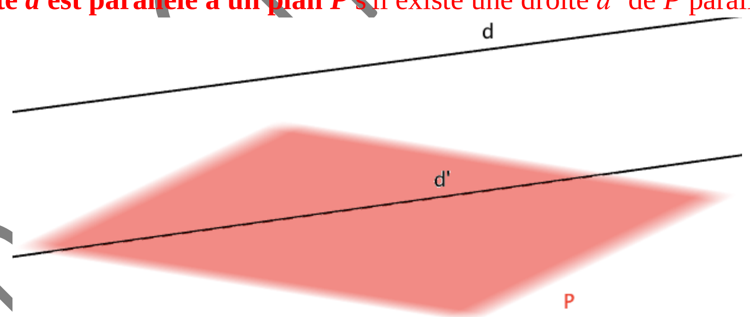
ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



IV.Parallélisme

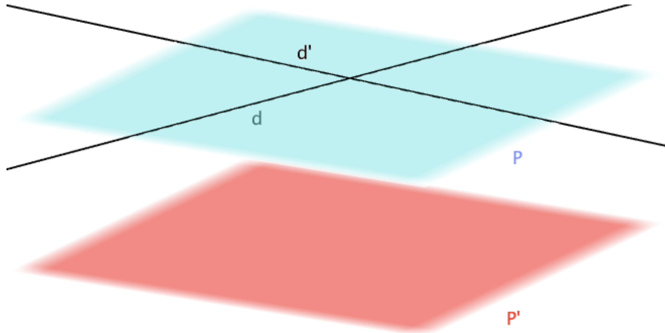
1) Parallélisme d'une droite avec un plan

Propriété : **Une droite *d* est parallèle à un plan *P*** s'il existe une droite *d'* de *P* parallèle à *d*.



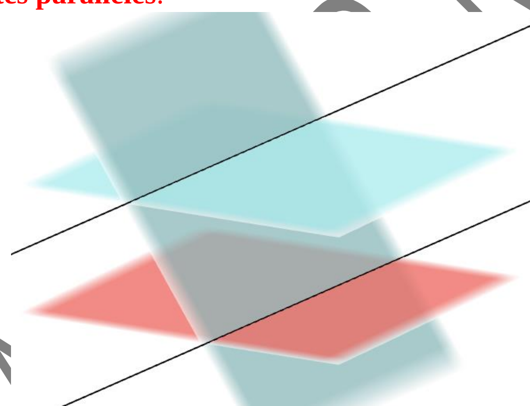
2) Parallélisme de deux plans

Propriété : Si un plan *P* contient deux droites sécantes *d* et *d*' parallèles à un plan *P'* alors **les plans *P* et *P*' sont parallèles**.



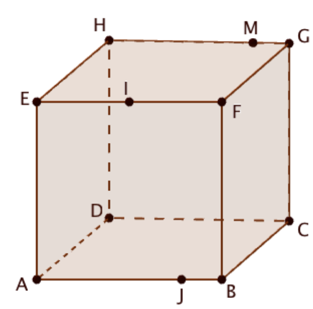
3) Parallélisme de deux droites

Propriété : Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et **leurs intersections sont deux droites parallèles**.

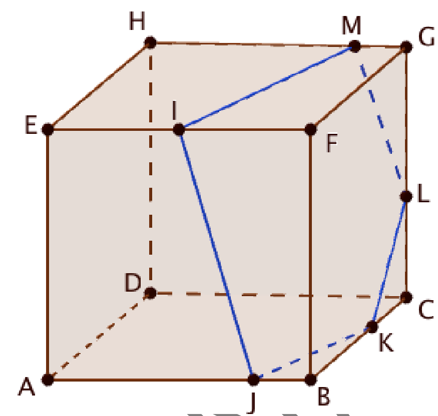


Méthode : Tracer l'intersection de deux plans

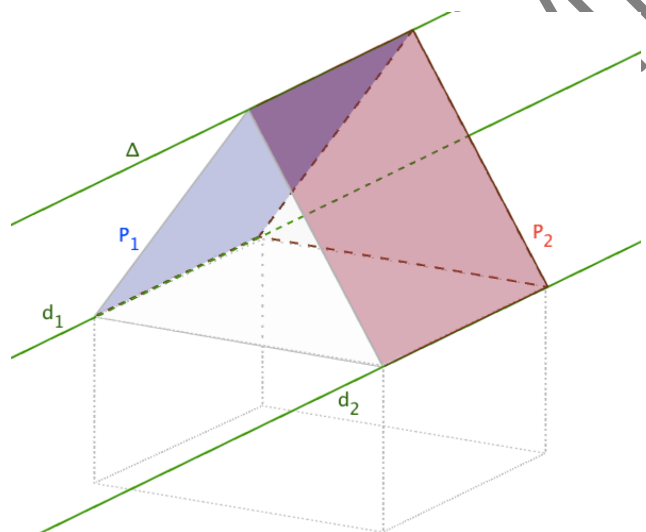
Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.



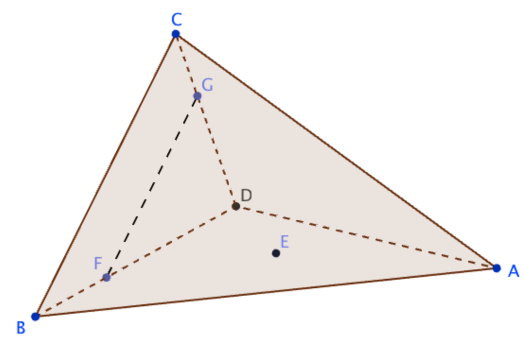
On construit la parallèle à (IJ) passant par M.
En effet, les faces ABFE et DCGH sont parallèles donc le plan (IMJ) sécant à la face ABFE coupe la face DCGH en une droite parallèle à (IJ).
De même, on trace la parallèle à (IM) passant par J.
On obtient les points K et L et ainsi l'intersection cherchée.



<u>Théorème du toit :</u> P_1 et P_2 sont deux plans sécants.
Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.



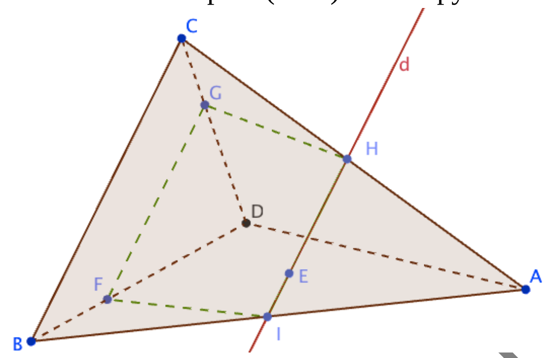
<u>Méthode :</u> Appliquer le théorème du toit



ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC].
E est un point du plan (ABC).
Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).
Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite d passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.

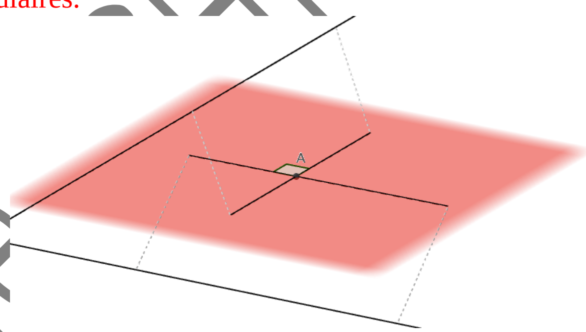
Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide.



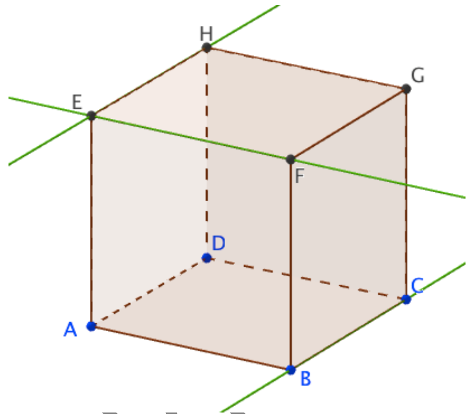
V.Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :

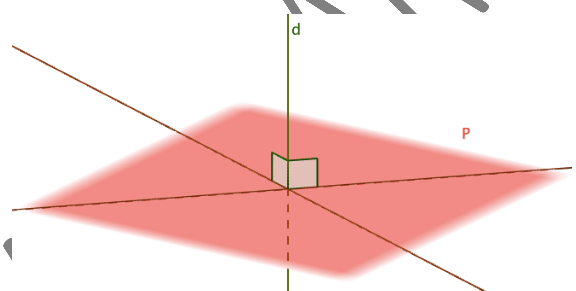


ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

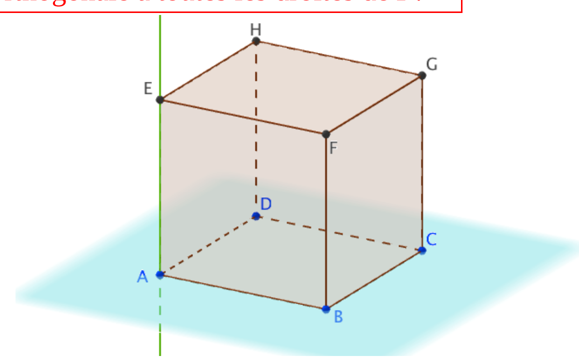
Remarques :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite *d* est orthogonale à un plan *P* si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.



Propriété : Si une droite *d* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.



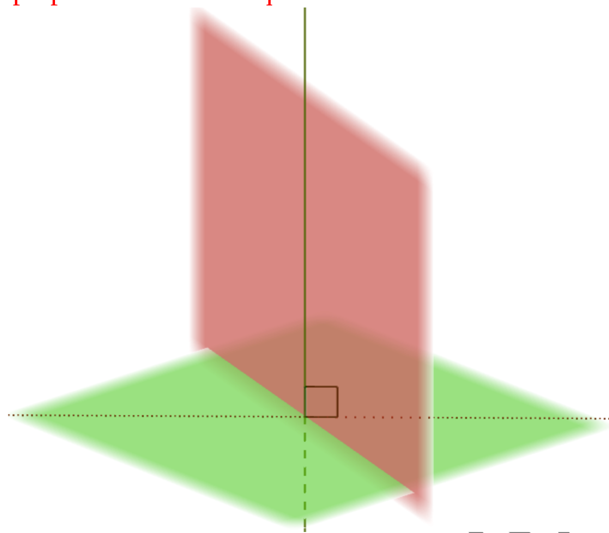
Démonstrations (exigible BAC) : Ces deux propriétés seront démontrées avec les outils vectoriels dans le chapitre "*Produit scalaire dans l'espace*".

Exemple :

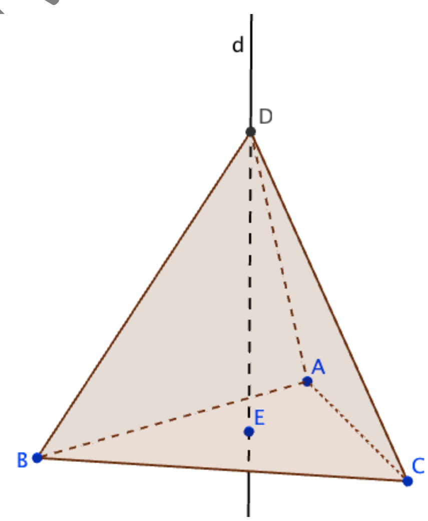
ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

3) Orthogonalité de deux plans

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales



ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite *d* passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite *d*.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

La droite *d* est orthogonale au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et *d*.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD).

VI.Définitions.

1) Angle de deux droites.

C'est l'un des angles de leurs parallèles menées d'un point quelconque de l'espace.

2) Propriétés.

*Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
*Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
*Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
*Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.
*Par un point donné, passe un plan unique perpendiculaire à une droite donnée.
*Par un point donné, passe un droite unique perpendiculaire à un plan donné.
*Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors toute droite passant par un point de ce plan et perpendiculaire à cette droite, est contenue dans ce plan.
*Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors toute droite orthogonale à cette droite, est contenue dans ce plan ou parallèle à ce plan.
*Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors toute droite parallèle à ce plan, est othogonale à cette droite.
*La distance d'un point à un plan est la longueur du segment joignant ce point au point projeté orthogonal du premier point sur le plan.
Tout autre segment joignant ce point à n'importe quel point du plan s'appelle segment oblique.

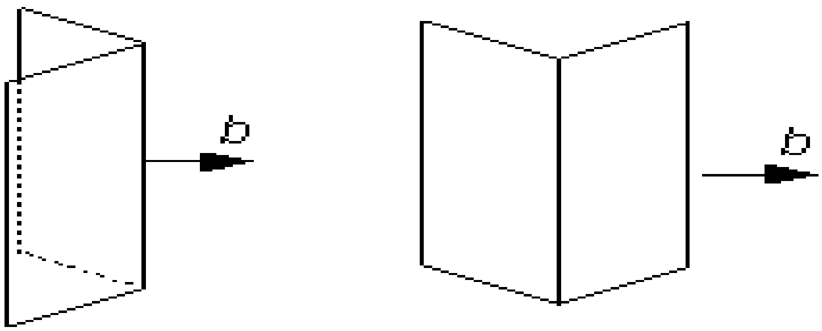
3) Plan médiateur.

Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire au segment en son milieu.
Le plan médiateur est l'ensemble des points équidistant des deux extrémités du segment.

4) Angle d'une droite et d'un plan.

Si la droite est parallèle au plan, alors l'angle est nul.
Si la droite n'est pas parallèle au plan, alors l'angle est celui formé par la droite et son projeté orthogonal sur ce plan.

5) <u>Dièdre.</u>



C’est la partie de l’espace comprise entre deux demi-plans, appelés faces du dièdre, issus d’une même droite , qui s’appelle arête du dièdre.
On le note (P,Q) un dièdre d’ arête (xy).
Si d’un point I de (xy) on mène respectivement dans (P) et (Q) les demi-droites [Iz) et [It) perpendiculaires à (xy). L’angle $\widehat{zIt} = \alpha$ s’appelle le rectiligne de ce dièdre.(si $\alpha = 90^{\circ}$ le dièdre est droit).

L’angle de deux plans est le rectiligne de l’un des dièdres formé par ces deux plans.

6) <u>Perpendiculaire commune.</u>
C’est le plus court chemin entre deux droites non coplanaires.

7) <u>Bissecteur d’un dièdre</u>.
Soit (P,Q) un dièdre d’ arête (xy). (B) un plan tel que les rectilignes des dièdres (P,B) et (B,Q) ont même mesure. On dit alors que B est le bissecteur du dièdre (P,Q) un dièdre d’ arête (xy).
(B) un plan tel que les rectilignes des dièdres (P,B) et (B,Q) ont même mesure. On dit alors que (B) est le bissecteur du dièdre. (P,Q)
Le plan bissecteur est l’ensemble des points équidistant des deux plans.