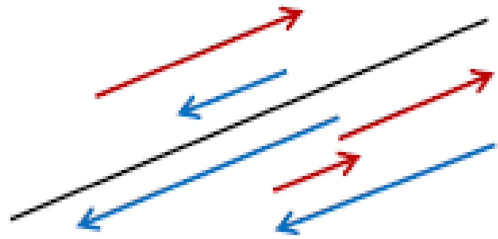
Equations de droites

1. Déterminer un vecteur directeur d'une droite

1.1 Lien à consulter Vecteur directeur d'une droite

1.2 Ce qu'il faut retenir :

Un vecteur $\vec{V}$ directeur d'une droite (d) est un vecteur non nul qui a la même direction que (d). Tout vecteur colinéaire à $\vec{V}$ est aussi un vecteur directeur de (d).



1.3 Exemple et application directe

<u>Exemple :</u>

Soit la droite (d) qui passe par les deux points $A(1;3)$ et $B(2;-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d), mais il n'est pas unique. On peut, par exemple, déterminer le réel a tel que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\a\end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de la droite (AB).

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\a\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AB). Ils sont donc colinéaires. Leur déterminant est donc nul.

$$dét(\overrightarrow{AB};\vec{u}) = \begin{vmatrix}1 & -1\\-4 & a\end{vmatrix} = 0$$
$$1\times a-(-1)\times(-4)=0$$
$$a=4$$

<u>Application directe :</u>

Déterminer les réels b, c et d tels que les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}2{,}5\\b\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}c\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}2d\\-5d+1\end{pmatrix}$ soient des vecteurs directeurs de (d).

Consulter le corrigé à la page suivante

Corrigé de l'application 1.3

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2.5\\b\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AB). Ils sont donc colinéaires. Leur déterminant est donc nul.

$$dét(\overrightarrow{AB};\vec{v}) = \begin{vmatrix}1 & 2.5\\-4 & b\end{vmatrix} = 0$$
$$1\times b-(2.5)\times(-4)=0$$
$$b=-10$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}c\\8\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AB). Ils sont donc colinéaires. Leur déterminant est donc nul.

$$dét(\overrightarrow{AB};\vec{w}) = \begin{vmatrix}1 & c\\-4 & 8\end{vmatrix} = 0$$
$$1\times 8-c\times(-4)=0$$
$$c=-2$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}2d\\-5d+1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AB). Ils sont donc colinéaires. Leur déterminant est donc nul.

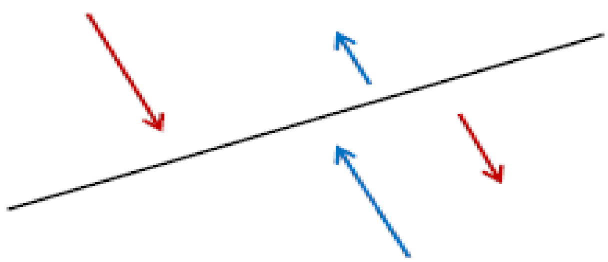
$$dét(\overrightarrow{AB};\vec{s}) = \begin{vmatrix}1 & 2d\\-4 & -5d+1\end{vmatrix} = 0$$
$$1\times(-5d+1)-2d\times(-4)=0$$
$$d=-\frac{1}{3}$$

2. Déterminer un vecteur normal à une droite

2.1 Lien à consulter [Vecteur normal à une droite]

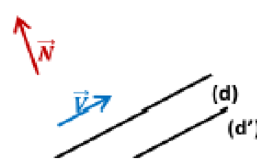
2.2 Ce qu'il faut retenir :

- Un vecteur normal $\vec{N}$ normal à une droite (d) est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de la droite (d).
- Tout vecteur colinéaire à $\vec{N}$ est aussi un vecteur normal à (d).
- Tout vecteur orthogonal à $\vec{N}$ est aussi un vecteur directeur de (d).

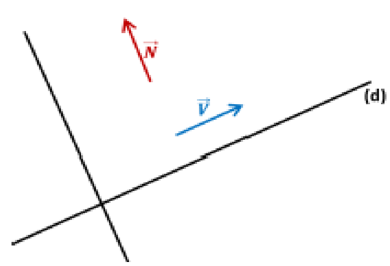


__Remarques__

- Si deux droites sont parallèles,
  - Tout vecteur directeur de l'une est aussi un vecteur directeur de l'autre.
  - Tout vecteur normal à l'une est aussi un vecteur normal à l'autre.



- Si deux droites sont perpendiculaires,
  - Tout vecteur directeur de l'une est un vecteur normal à l'autre.
  - Tout vecteur normal à l'une est un vecteur directeur de l'autre.



Propriétés

- Si $\vec{N}(a;b)$ est un vecteur normal à (d), alors $\vec{V}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (d).
  En effet, le produit scalaire de $\vec{N}(a;b)$ et $\vec{V}(-b;a)$ est $-ab+ab=0$
  ex:
  Si $\vec{N}(1;2)$ est un vecteur normal à (d), alors $\vec{V}(-2;1)$ est un vecteur directeur de (d)
  Si $\vec{N}(-5;2)$ est un vecteur normal à (d), alors $\vec{V}(-2;-5)$ est un vecteur directeur de (d)

- Si $\vec{V}(\alpha;\beta)$ est un vecteur directeur de (d) alors $\vec{N}(-\beta;\alpha)$ est un vecteur normal à (d).
  En effet, le produit scalaire de $\vec{V}(\alpha;\beta)$ et $\vec{N}(-\beta;\alpha)$ est $-\alpha\beta+\alpha\beta=0$
  ex:
  Si $\vec{V}(2;5)$ est un vecteur directeur de (d) alors $\vec{N}(-5;2)$ est un vecteur normal à (d).
  Si $\vec{V}(1;-3)$ est un vecteur directeur de (d) alors $\vec{N}(3;1)$ est un vecteur normal à (d).

2.3 Application :

Déterminer un vecteur normal $\vec{N}$ à la droite passant par les points $A(2;1)$ et $B(3;3)$

Corrigé :

$\overrightarrow{AB}(1;2)$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Donc le vecteur $\vec{N}(-2;1)$ est un vecteur normal à la droite (AB).

3. Équation cartésienne d'une droite

On sait déjà qu'une équation d'une droite peut s'écrire sous la forme $y=ax+b$ avec a et $b\in\mathbb{R}$
Dans cette partie, nous allons découvrir une nouvelle forme : une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et $c\in\mathbb{R}$ et où a et b ne s'annulent pas en même temps

3.1 Lien à consulter :

Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$

3.2 Ce qu'il faut savoir :

Soit (d) une droite passant par un point $A(x_A;y_A)$ et admettant un vecteur $\vec{V}(\alpha;\beta)$ comme vecteur directeur.
Pour tout point $M(x;y)$ de (d), on a :

$\overrightarrow{AM}\left|\begin{matrix}x-x_A\\y-y_A\end{matrix}\right.$ et $\vec{V}\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ sont colinéaires, donc :

$$dét(\overrightarrow{AB};\vec{V})=\begin{vmatrix}x-x_A & \alpha\\ y-y_A & \beta\end{vmatrix}=0$$

$$\beta\times(x-x_A)-\alpha\times(y-y_A)=0$$
$$\beta x-\beta x_A-\alpha y+\alpha y_A=0$$
$$\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A=0$$

On obtient donc la forme $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

4. Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite

4.1 Exercice résolu

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne d'une droite (d) passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 5)$.

Pour tout point $M(x; y)$ de la droite (d), on a :

$\vec{u}(-1; 5)$ et $\overrightarrow{AM}(x-3; y-1)$ sont colinéaires. Donc, $dét(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = 0$

$$-1(y-1) - (5)(x-3) = 0$$
$$-y + 1 - 5x + 15 = 0$$
$$-5x - y + 16 = 0$$

En multipliant les deux membres par (-1), on obtient :

$$5x + y - 16 = 0$$

D'où, une équation cartésienne de la droite (d) est :

$$(d): 5x + y - 16 = 0$$

Remarquons que cette équation n'est pas unique.

Remarques :

Soit $(d): ax + by + c = 0$

- Le vecteur $\vec{V}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).
- Le vecteur $\vec{N}(a; b)$ est un vecteur normal évident de (d)

4.2 Application :

Exercices 3 et 7 de la page 248 du manuel (Al Ahlia – collection Puissances)

5. Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de deux points de cette droite

5.1 Exercice résolu

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne d'une droite (d) passant par les points $A(5; 3)$ et $B(1; -3)$.

La droite (d) passe par les points $A(5; 3)$ et $B(1; -3)$, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4; -6)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Pour tout point $M(x; y)$ de la droite (d), on a :

$\overrightarrow{AB}(-4; -6)$ et $\overrightarrow{AM}(x-5; y-3)$ sont colinéaires. Donc, $dét(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0$

$$-4(y-3) - (-6)(x-5) = 0$$
$$-4y + 12 + 6x - 30 = 0$$
$$6x - 4y - 18 = 0$$

En divisant les deux membres par 2, on obtient :

$$3x - 2y - 9 = 0$$

D'où, une équation cartésienne de la droite (d) est :

$$(d): 3x - 2y - 9 = 0$$

Remarquons que cette équation n'est pas unique.

5.2 Application

Exercice 4 de la page 248 du manuel (Al Ahlia – collection Puissances)

6. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur normal à cette droite

6.1 Ce qu'il faut savoir :

Soit (d) une droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et admettant un vecteur $\vec{N}(a; b)$ comme vecteur normal.

Pour tout point $M(x; y)$ de (d), on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{vmatrix}$ et $\vec{N}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ sont orthogonaux

Donc $\overrightarrow{AM}.\vec{N} = 0$

Donc $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

$$ax - ax_A + by - by_A = 0$$

$$ax + by - ax_A - by_A = 0$$

On obtient donc la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

6.2 Exercice résolu :

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne d'une droite (d) passant par le point $A(-5; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; -1)$.

Pour tout point $M(x; y)$ de la droite (d), on a :
$\vec{n}(3; -1)$ et $\overrightarrow{AM}(x + 5; y - 4)$ sont orthogonaux. Donc, $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

$$3(x + 5) + (-1)(y - 4) = 0$$
$$3x + 15 - y + 4 = 0$$
$$3x - y + 19 = 0$$

D'où, une équation cartésienne de la droite (d) est :

$$(d): 3x - y + 19 = 0$$

Remarques :
Soit $(d): ax + by + c = 0$

- Le vecteur $\vec{N}(a; b)$ est un vecteur normal évident de (d)
- Le vecteur $\vec{V}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).

6.3 Application :

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Déterminer une équation cartésienne d'une droite (d) passant par le point $A(-2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5; -4)$.

Solution :

a. Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\left|\begin{matrix} x-1 \\ y-3 \end{matrix}\right.$ et $\vec{u}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\vec{u}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\vec{u}} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x-1 = 2 \times t \\ y-3 = -1 \times t \end{cases}$

Alors (d): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Remarques :

- Quand une représentation paramétrique d'une droite est donnée, on y retrouve facilement les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.
  (d): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$
  Ici, $(2; -1)$ sont les coordonnées évidentes d'un vecteur directeur de cette droite.

- Quand une représentation paramétrique d'une droite est donnée, on y retrouve facilement les coordonnées d'un point de cette droite.
  (d): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

  Ici, $(1; 3)$ sont les coordonnées évidentes d'un point de cette droite, coordonnées obtenues pour $t = 0$.
  On note qu'à toute valeur du réel t, correspond un point de la droite (d).

- Une représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique.

- Une représentation paramétrique d'une droite dans un plan se traduit par un système de deux équations et non par une seule équation.

- Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite, on a besoin d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite. Donc si on a un vecteur normal, il faut retrouver un vecteur directeur pour trouver la représentation paramétrique.

b. $\vec{n}(2; -1)$ est un vecteur normal à (d), donc $\vec{u}(1; 2)$ en est un vecteur directeur.
Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a :
$\overrightarrow{AM}\left|\begin{matrix} x-2 \\ y+1 \end{matrix}\right.$ et $\vec{u}\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right.$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\vec{u}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\vec{u}} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x-2 = 1 \times t \\ y+1 = 2 \times t \end{cases}$

Alors (d): $\begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Application directe :

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Déterminer la représentation paramétrique de (d) dans chacun des cas suivants :

a. (d) passe par $A(4; -2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;3)$

b. (d) passe par $A(3; -5)$ et $B(-4; -2)$

c. (d) passe par $A(-4; -1)$ et parallèle à la droite (d') d'équation cartésienne : $(d'): -x - 3y + 3 = 0$

d. (d) passe par $A(1; -3)$ et parallèle à la droite (d'): $\begin{cases} x = -2t + 6 \\ y = -5t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Consulter le corrigé à la page 7 et sur le lien suivant : Corrigé de l'application 1.3

2. Déterminer l'équation réduite d'une droite

2.1 Lien à consulter [Equation réduite d'une droite]

2.2 Ce qu'il faut retenir :

Soit (d) une droite passant par deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

On distingue deux cas :

- **Si $(d) \parallel (y'y)$, alors $(d) : x = x_A$.**
- **Sinon,** l'équation réduite de (d) est de la forme : $y = mx + b$
  où $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ *et* $b = y_A - mx_A$

En remplaçant b dans l'équation, on retrouve $y = mx + y_A - mx_A = m(x - x_A) + y_A$

On peut donc écrire l'équation réduite d'une droite (d) passant par un point A sous la forme suivante : $y = m(x - x_A) + y_A$

Pente d'une droite

On dit que m est la pente ou le coefficient directeur de (d).

- Si (d) passe par deux points distincts A et B n'ayant pas la même abscisse $(x_B \neq x_A)$, alors :

$$m_{(d)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- Si A et B ont la même abscisse, c'est-à-dire, si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, m n'existe pas (puisque le dénominateur $x_B - x_A$ serait nul dans ce cas).
- Si A et B ont la même ordonnée, c'est-à-dire, si la droite est parallèle à l'axe des abscisses, alors m existe et est nulle.
- Pour tous points A et B de (d), on a :

$$m_{(d)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{Y_{\overrightarrow{AB}}}{X_{\overrightarrow{AB}}}$$

- Plus généralement, soit $\vec{V}$ un vecteur directeur d'une droite (d), alors la pente de (d) est :

$$m_{(d)} = \frac{Y_{\vec{V}}}{X_{\vec{V}}}$$

- Si deux droites sont parallèles, alors elles ont la même pente :
  (d) // (d') $\Leftrightarrow m_{(d)} = m_{(d')}$
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors le produit de leurs pentes vaut -1
  (d) $\perp$(d') $\Leftrightarrow m_{(d)} \times m_{(d')} = -1$
- Si (d) forme un angle aigu $\propto$ avec l'axe $(x'x)$, alors $m = \pm\tan \propto$
  - Si (d) est ascendante, alors $m > 0$ et $m = \tan \propto$
  - Si (d) est descendante, alors $m < 0$ et $m = -\tan \propto$

2.3 Application :

Ecrire l'équation réduite de chacune des droites suivantes :

a. (d_1) passant par $A(-4\ ;-2)$ et $B(2\ ;3)$
b. (d_2) passant par $A(\sqrt{3}\ ;5)$ et $B(\sqrt{3}\ ;-7)$
c. (d_3) passant par $I(-2\ ;\ 1)$ et parallèle à (d'): $y = -2x + 1$
d. (d_4) passant par $J(-3\ ;\ 4)$ et perpendiculaire à (Δ): $y = -4x + \frac{3}{2}$
e. (d_5) ascendante et passant par $H(3\ ;\ -1)$ et formant un angle de 30^0 avec l'axe des abscisses.
f. (d_6) passe par $A(1\ ;2)$ de vecteur directeur $\vec{V}(-2\ ;5)$
g. (d_7) passe par $B(5;1)$ de vecteur normal $\vec{N}(5\ ;2)$

Consulter le corrigé à la page 8

3. Passer d'une forme à une autre

Nous connaissons à présent trois représentations d'une droite dans un plan : cartésienne, paramétrique et réduite. Dans cette partie, nous apprendrons à passer d'une forme à une autre

3.1 Ce qu'il faut savoir :

De la forme réduite

Soit $(d): y = 2x - 3$

- $(d): 2x - y - 3 = 0$ forme cartésienne
- On pose $x = t$ avec $t \in \mathbb{R}$
  Donc $y = 2t - 3$
  $(d): \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ forme paramétrique

De la forme cartésienne

Soit $(d): 2x + 5y - 1 = 0$

- $(d): y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ forme réduite
- On pose $x = 5t$ avec $t \in \mathbb{R}$
  Donc $y = -2t + \frac{1}{5}$
  $(d): \begin{cases} x = 5t \\ y = -2t + \frac{1}{5} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ forme paramétrique

De la forme paramétrique

Soit $(d): \begin{cases} x = 3m - 2 \\ y = -5m + 1 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

$m = \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{1-y}{5}$
$5x + 10 = 3 - 3y$
$5x + 3y + 7 = 0$

- $(d): 5x + 3y + 7 = 0$ forme cartésienne
- $(d): y = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$ forme réduite

Droites particulières

$(x'x): y = 0$ formes réduite et cartésienne

$(x'x): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ forme paramétrique

$(y'y): x = 0$ formes réduite et cartésienne

$(y'y): \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ forme paramétrique

Exercices à travailler sur le cahier

Manuel de maths, Puissances. p. 248 exercices : 1 ; 2 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 17 ; 18 ; 20 ; 22

Corrigé des applications

Corrigé de l'application 1.3

a. Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-4 \\ y+2 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\vec{u}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\vec{u}} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x-4 = -1 \times t \\ y+2 = 3 \times t \end{cases}$

Alors (d): $\begin{cases} x = -t + 4 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

b. Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-3 \\ y+5 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -7 \\ 3 \end{vmatrix}$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\overrightarrow{AB}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x-3 = -7 \times t \\ y+5 = 3 \times t \end{cases}$

Alors (d): $\begin{cases} x = -7t + 3 \\ y = 3t - 5 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

c. Les droites (d) et (d') sont parallèles, donc tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.

On a : (d'): $-x - 3y + 3 = 0$ donc, $\vec{u}(3\,;-1)$ est un vecteur directeur de (d) et (d').

Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x+4 \\ y+1 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\vec{u}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\vec{u}} \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x+4 = 3 \times t \\ y+1 = -1 \times t \end{cases}$ Alors (d): $\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = -t - 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

d. Les droites (d) et (d') sont parallèles, donc tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.

(d'): $\begin{cases} x = -2t + 6 \\ y = -5t + 4 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ donc, $\vec{u}(-2\,;-5)$ est un vecteur directeur de (d) et (d').

Pour tout point $M(x;y) \in (d)$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-1 \\ y+3 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix} -2 \\ -5 \end{vmatrix}$ sont colinéaires

Donc il existe un paramètre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ Donc $\begin{cases} X_{\overrightarrow{AM}} = t \times X_{\vec{u}} \\ Y_{\overrightarrow{AM}} = t \times Y_{\vec{u}} \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x-1 = -2 \times t \\ y+3 = -5 \times t \end{cases}$ Alors (d): $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -5t - 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Corrigé de l'application 2.3

a. (d_1) passant par $A(-4\,;-2)$ et $B(2\,;3)$

Comme A et B ont des abscisses différentes, alors l'équation réduite de (d_1) est de la forme (d_1): $y = m(x - x_A) + y_A$

On peut de même appliquer la même formule aux coordonnées du point B puisque c'est aussi un point de (d_1)

$$(d_1): y = m(x - x_A) + y_A$$

$$(d_1): y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

$$(d_1): y = \frac{3-(-2)}{2-(-4)}(x - (-4)) + (-2)$$

$$(d_1): y = \frac{5}{6}(x+4) + (-2)$$

$$(d_1): y = \frac{5}{6}x + \frac{20}{6} - \frac{12}{6}$$

$$(d_1): y = \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$$

b. (d_2) passant par $A(\sqrt{3}\,;5)$ et $B(\sqrt{3}\,;-7)$

L'équation réduite n'est pas de la forme (d_2): $y = m(x - x_A) + y_A$ puisque les points A et B ont la même abscisse. (d_2) est donc une droite parallèle à l'axe des coordonnées.

Alors l'équation réduite de (d_2) est :

$$(d_2): x = x_A$$

$$(d_2): x = \sqrt{3}$$

c. (d_3) passant par $I(-2\,;\,1)$ et parallèle à (d'): $y = -2x + 1$

Comme (d_3) est parallèle à la droite (d') d'équation (d'): $y = -2x + 1$, alors l'équation réduite de (d_3) est de la forme (d_3): $y = m(x - x_I) + y_I$

$$m = m_{(d_3)} = m_{(d')} = -2$$

$$(d_3): y = -2\big(x - (-2)\big) + 1$$

$$(d_3): y = -2(x+2) + 1$$

$$(d_3): y = -2x - 4 + 1$$

$$(d_3): y = -2x - 3$$

d. (d_4) passant par $J(-3\ ;\ 4)$ et perpendiculaire à (Δ): $y = -4x + \frac{3}{2}$

Comme (d_4) est perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $(\Delta): y = -4x + \frac{3}{2}$, alors l'équation réduite de (d_4) est de la forme $(d_4): y = m(x - x_J) + y_J$

$$m = m_{(d_4)} = -\frac{1}{m_{(\Delta)}} = \frac{1}{4}$$

$$(d_4): y = \frac{1}{4}(x - (-3)) + 4$$

$$(d_4): y = \frac{1}{4}(x + 3) + 4$$

$$(d_4): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{16}{4}$$

$$(d_4): y = \frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$$

e. (d_5) ascendante et passant par $H(3\ ;\ -1)$ et formant un angle de 30° avec l'axe des abscisses.

Comme (d_5) forme un angle de 30° avec l'axe des abscisses, donc son équation réduite est de la forme $(d_5): y = m(x - x_H) + y_H$

Comme (d_5) est ascendante, donc sa pente m est positive et vaut

$$m = +\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(d_5): y = m(x - x_H) + y_H$$

$$(d_5): y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) + (-1)$$

$$(d_5): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} - 1$$

f. (d_6) passe par $A(1\ ;2)$ de vecteur directeur $\vec{V}(-2\ ;5)$

Comme (d_6) a pour vecteur directeur $\vec{V}(-2\ ;5)$, alors son équation réduite est de la forme $(d_6): y = m(x - x_A) + y_A$

$$m = \frac{Y_{\vec{V}}}{X_{\vec{V}}} = -\frac{5}{2}$$

$$(d_6): y = m(x - x_A) + y_A$$

$$(d_6): y = -\frac{5}{2}(x - 1) + 2$$

$$(d_6): y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4}{2}$$

$$(d_6): y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$$

g. (d_7) passe par $B(5;1)$ de vecteur normal $\vec{N}(5\,;2)$

Comme la droite (d_7) a pour vecteur normal $\vec{N}(5\,;2)$, alors elle admet $\vec{V}(-2;5)$ comme vecteur directeur et son équation réduite est de la forme $(d_7): y = m(x - x_B) + y_B$

$$m = \frac{Y_{\vec{V}}}{X_{\vec{V}}} = -\frac{5}{2}$$

$$(d_7): y = m(x - x_B) + y_B$$

$$(d_7): y = -\frac{5}{2}(x - 5) + 1$$

$$(d_7): y = -\frac{5}{2}x + \frac{25}{2} + \frac{2}{2}$$

$$(d_7): y = -\frac{5}{2}x + \frac{27}{2}$$

1. Calculer la distance d'un point à une droite

1.1 Lien à consulter [Distance d'un point à une droite]

1.2 Ce qu'il faut retenir :

La valeur absolue d'un nombre x, notée $|x|$, est la distance à zéro de ce nombre x. Elle est donc positive.

Exemples :

- $|3| = |-3| = 3$
- $|3-5| = |-2| = 2$

On considère un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

Soit une droite $(d): ax + by + c = 0$ où a et b ne s'annulent pas simultanément.

Soit un point $P(x_P; y_P)$.

La distance du point P à la droite (d) est la longueur du segment qui joint ce point P à son projeté orthogonal H sur cette droite (d).

$$d\big(P; (d)\big) = PH = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Attention, dans la formule, on remplace les coordonnées du point dans une <u>équation cartésienne</u> de la droite.

1.3 Application :

a. Trouver la distance du point A à la droite (d) dans chacun des cas suivants :

1. $A(4; -3)$ et $(d): -3x + 4y + 16 = 0$
2. $A(2; 1)$ et $(d): y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
3. $A(1; 3)$ et $(d): \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 3 \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$
4. $A(3; 1)$ et $(d): x = 3$

b. Trouver la distance entre les deux droites parallèles suivantes :

1. $(D): 4x + 3y - 8 = 0$ et $(D'): 4x + 3y - 33 = 0$
2. $(D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$ et $\quad (D'): \begin{cases} x = m - 1 \\ y = -m + 3 \end{cases}$ $\quad t, m \in \mathbb{R}$

Consulter le corrigé aux pages 4 et 5

2. Déterminer les positions relatives de deux droites

2.1 Ce qu'il faut retenir :

Soient deux droites $(D1)$ et $(D2)$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

- Le déterminant de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ est non nul si et seulement si les droites $(D1)$ et $(D2)$ sont sécantes.
- Le déterminant de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ est nul si et seulement si les droites $(D1)$ et $(D2)$ sont parallèles ou confondues.
  Dans ce cas, on choisit un point quelconque de l'une des droites et on vérifie s'il appartient à l'autre.

2.2 Application :

Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont parallèles, confondues ou sécantes

a. $(D1): x - y - 4 = 0$ et $(D2): y = x - 4$

b. $(D1): x + y + 5 = 0$ et $(D2): 2x - y + 1 = 0$

c. $(D1): y = 4x + 1$ et $(D2): y = 4x - 5$

d. $(D1): \begin{cases} x = 2m - 3 \\ y = -m + 5 \end{cases} (m \in \mathbb{R})$ et $(D2): \begin{cases} x = 4n + 1 \\ y = -2n + 3 \end{cases} n \in \mathbb{R}$

e. $(D1): \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 2t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $(D2): x - 2y = 9$

f. $(D1): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 5 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ *et* $(D2): \begin{cases} x = -4s + 1 \\ y = 2s + 3 \end{cases} (s \in \mathbb{R})$

Consulter le corrigé aux pages 6 et 7

3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites

3.1 Lien à consulter [Intersection de deux droites]

3.2 Ce qu'il faut retenir :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes revient à résoudre le système formé par les équations de ces deux droites.

3.3 Application :

Etudier la position relative des deux droites $(D1)$ et $(D2)$ et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a. $(D1): 2x - 5y - 35 = 0$ et $(D2): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b. $(D1): \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(D2): \begin{cases} x = 1 - 15r \\ y = -1 + 6r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$

Consulter le corrigé aux pages 7, 8 et 9 et sur le lien : [Corrigé de l'application 3.3]

3.4 Application :

Soit la droite $(d): x - 3y + 3 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 5)$.

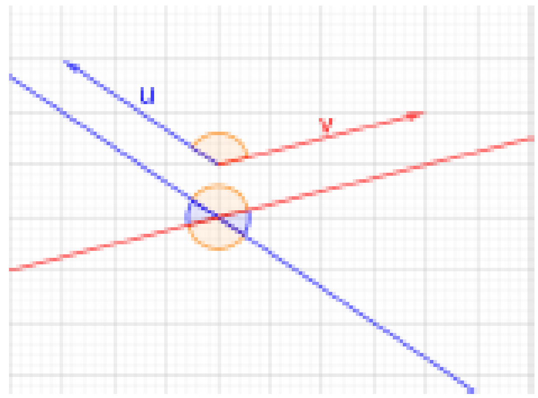
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (d).

Consulter le corrigé à la page 9 et sur le lien suivant : [Corrigé de l'application 3.4]

4. Calculer la mesure de l'angle formé par deux droites

4.1 Ce qu'il faut retenir :

Deux droites sécantes forment deux paires d'angles : deux angles aigus et deux angles obtus. Pour déterminer l'angle aigu formé par deux droites, il suffit de calculer la mesure de l'angle formé par leurs vecteurs directeurs à l'aide du produit scalaire. Si les deux vecteurs directeurs forment un angle obtus, on n'a alors qu'à prendre son supplémentaire.



4.2 Exemples :

Déterminer l'angle (inférieur ou égal à 90°) formé par les droites $(D1)$ et $(D2)$ dans chacun des cas suivants :

a. $(D1): 3x - y - 1 = 0$ et $(D2): x + 3y - 5 = 0$

$\vec{u}_1(1; 3)$ et $\vec{u}_2(-3; 1)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.

$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 1 \times (-3) + (3) \times 1 = -3 + 3 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.

Les droites $(D1)$ et $(D2)$ sont donc perpendiculaires.

Elles forment un angle de 90°.

b. $(D1): 2x + 3y - 5 = 0$ et $(D2): 6x - 3y + 1 = 0$

$\vec{u}_1(3; -2)$ et $\vec{u}_2(3; 6)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.

$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 3 \times (3) + (-2) \times 6 = 9 - 12 = -3$

Donc l'angle $\propto$ formé par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ est obtus. Sa mesure est donnée par :

$$\cos \propto = \frac{\vec{u}_1 \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|} = -\frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \times \sqrt{3^2 + 6^2}} = -\frac{3}{\sqrt{13} \times \sqrt{45}}$$

$$\propto \approx 97°$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment un angle obtus qui vaut environ 97°

Donc les droites $(D1)$ et $(D2)$ forment un angle aigu qui vaut environ :

$$180° - 97° = 83°$$

Exercices à travailler sur le cahier

Faire les exercices de la fiche sur les équations de droites

Corrigé des applications

Corrigé de l'application 1.3

a. Trouver la distance du point A à la droite (xy) dans chacun des cas suivants :

1. $\boldsymbol{A(4;-3)}$ **et** $\boldsymbol{(d): -3x+4y+16=0}$
   L'équation cartésienne de (d) est $-3x+4y+16=0$
   $a=-3\,; b=4\,; c=16\,;\ x_A=4\,;\ y_A=-3$
   $$D(A;(d))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3(4)+4(-3)+16|}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}}=\frac{|-12-12+16|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-8|}{\sqrt{25}}$$
   $$=\frac{8}{5}$$

2. $\boldsymbol{A(2;1)}$ **et** $\boldsymbol{(d): y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}$
   L'équation cartésienne de (d) est $4x-3y-5=0$
   $a=4\,; b=-3\,; c=-5\,;\ x_A=2\,;\ y_A=1$
   $$D(A;(d))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(2)-3(1)-5|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{|8-3-5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|0|}{\sqrt{25}}=0$$
   Donc A est un point de (d).

3. $\boldsymbol{A(1;3)}$ **et** $\boldsymbol{(d): \begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$

   Une représentation paramétrique de (d) est : $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$
   C'est-à-dire que $\begin{cases} t=x+1 \\ t=\frac{1}{2}(y-3) \end{cases}$
   On égalise les expressions de t dans les deux équations du système :
   $$x+1=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$
   On multiplie les deux membres de l'équation obtenue par 2 pour se débarrasser du dénominateur 2.
   $$2x+2=y-3$$
   $$2x-y+5=0$$
   Donc une équation cartésienne de (d) est $2x-y+5=0$

   $a=2\,; b=-1\,; c=8\,;\ x_A=1\,;\ y_A=3$

   La distance du point $A(1;3)$ à la droite (d) est donnée par :

   $$D(A;(d))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2(1)+(-1)(3)+5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\frac{|2-3+5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|4|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

4. $\boldsymbol{A(3;1)}$ *et* $\boldsymbol{(d): x=3}$
   Le point $A(3;1)$ appartient à la droite (d) d'équation $x=3$ puisque l'abscisse de A vaut 3.
   Donc la distance de A à (d) est nulle.

b. Trouver la distance entre les deux droites parallèles suivantes :

1. $(D): 4x + 3y - 8 = 0$ **et** $(D'): 4x + 3y - 33 = 0$

Les deux droites (D) et (D') sont parallèles puisqu'elles admettent le vecteur $(-3; 4)$ comme vecteur directeur.

La distance entre ces deux droites parallèles est la distance d'un point de l'une à l'autre.

Le point $A(2\,;0)$ est un point de (D) puisque $4(2) + 3(0) - 8 = 0$

Déterminer la distance entre les deux droites parallèles (D) et (D') revient donc à déterminer la distance du point $A(2; 0)$ à la droite (D').

Une équation cartésienne de (D') est $4x + 3y - 33 = 0$

$a = 4; b = 3\,; c = -33\,;\ x_A = 2\,;\ y_A = 0$

$$D(A; (D')) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(2) + (3)(0) - 33|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|8 + 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-25|}{5}$$
$$= \frac{25}{5} = 5$$

2. $(D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$ **et** $(D'): \begin{cases} x = m - 1 \\ y = -m + 3 \end{cases}$ $t, m \in \mathbb{R}$

Les deux droites (D) et (D') sont parallèles puisqu'elles admettent le vecteur $(1; -1)$ comme vecteur directeur.

La distance entre ces deux droites parallèles est la distance d'un point de l'une à l'autre.

Le point $A(1\,;2)$ est un point de (D) puisque pour $t = 0$, $x = 1$ et $y = 2$.

Déterminer la distance entre les deux droites parallèles (D) et (D') revient donc à déterminer la distance du point $A(1; 2)$ à la droite (D').

Déterminons une équation cartésienne de (D') :

$(D'): \begin{cases} x = m - 1 \\ y = -m + 3 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$

Donc $m = x + 1 = 3 - y$

$$x + 1 = 3 - y$$
$$x + y + 1 - 3 = 0$$
$$x + y - 2 = 0$$

Une équation cartésienne de (D') est $x + y - 2 = 0$

$a = 1; b = 1\,; c = -2\,;\ x_A = 1\,;\ y_A = 2$

$$D(A; (D')) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + (1)(2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{|1 + 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Corrigé de l'application 2.2

Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont parallèles, confondues ou sécantes

a. $(D1): x - y - 4 = 0$ *et* $(D2): y = x - 4$

Pour trouver un vecteur directeur de $(D2)$, on a besoin d'une équation cartésienne.

$(D2): x - y - 4 = 0$

On remarque que $(D1)$ et $(D2)$ ont une même équation cartésienne.

Donc $(D1)$ et $(D2)$ sont confondues.

b. $(D1): x + y + 5 = 0$ **et** $(D2): 2x - y + 1 = 0$

$\vec{u}_1(-1; 1)$ et $\vec{u}_2(1; 2)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.

$dét(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (1)(1) = -2 - 1 = -3 \neq 0$

Donc $(D1)$ et $(D2)$ sont sécantes.

c. $(D1): y = 4x + 1$ **et** $(D2): y = 4x - 5$

D'après les équations réduites de $(D1)$ et $(D2)$, ces deux droites ont le même coefficient directeur $m = 4$, mais leurs équations réduites sont différentes. Donc $(D1)$ et $(D2)$ sont parallèles non confondues.

d. $(D1): \begin{cases} x = 2m - 3 \\ y = -m + 5 \end{cases} (m \in \mathbb{R})$ **et** $(D2): \begin{cases} x = 4n + 1 \\ y = -2n + 3 \end{cases} n \in \mathbb{R}$

$\vec{u}_1(2; -1)$ et $\vec{u}_2(4; -2)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.

$dét(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (-1)(4) = -4 + 4 = 0$

Donc $(D1)$ et $(D2)$ ne sont pas sécantes.

Il reste à savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues.

$A(-3; 5)$ est un point de $(D1)$ (pour $m = 0$).

Vérifions si ce point appartient à $(D2)$.

Pour le faire, remplaçons x et y dans la représentation paramétrique de $(D2)$ et calculons la valeur du paramètre n dans chacune des équations du système.

$(D2): \begin{cases} x = 4n + 1 & (1) \\ y = -2n + 3 & (2) \end{cases} \quad n \in \mathbb{R}$

(1): $-3 = 4n + 1$	(2): $5 = -2n + 3$
$4n = -4$	$2n = -2$
$n = -1$	$n = -1$

Comme on obtient la même valeur du paramètre n, alors le point $A(-3; 5)$ est un point de $(D2)$.

Par suite, $(D1)$ et $(D2)$ sont confondues.

e. $(D1): \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 2t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ **et** $(D2): x - 2y = 9$

$\vec{u}_1(1; 2)$ et $\vec{u}_2(2; 1)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.

$dét(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$

Donc $(D1)$ et $(D2)$ sont sécantes.

f. $(D1): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 5 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ *et* $(D2): \begin{cases} x = -4s + 1 \\ y = 2s + 3 \end{cases} (s \in \mathbb{R})$

$\vec{u}_1(2; -1)$ et $\vec{u}_2(-4; 2)$ sont deux vecteurs directeurs de $(D1)$ et $(D2)$ respectivement.
$dét(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-4)(-1) = 4 - 4 = 0$
Donc $(D1)$ et $(D2)$ ne sont pas sécantes.

Il reste à savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues.
$A(-1; 5)$ est un point de $(D1)$ (pour $t = 0$).
Vérifions si ce point appartient à $(D2)$.
Pour le faire, remplaçons x et y dans la représentation paramétrique de $(D2)$ et calculons la valeur du paramètre s dans chacune des équations du système.

$(D2): \begin{cases} x = -4s + 1 & (1) \\ y = 2s + 3 & (2) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

(1): $-1 = -4s + 1$
$4s = 2$
$s = \frac{1}{2}$

(2): $5 = 2s + 3$
$2s = 2$
$s = 1$

Comme on obtient deux valeurs différentes du paramètre s, alors le point $A(-1; 5)$ n'est pas un point de $(D2)$.
Par suite, $(D1)$ et $(D2)$ sont strictement parallèles.

Corrigé de l'application 3.3

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) des deux droites $(D1)$ et $(D2)$ définies par :

$(D1): 2x - 5y - 35 = 0$ et $(D2): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Le vecteur $\overrightarrow{u_1}(5; 2)$ est un vecteur directeur de $(D1)$

Le vecteur $\overrightarrow{u_2}(-1; 3)$ est un vecteur directeur de $(D2)$

Calculons le déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

$dét(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - (-1) \times 2 = 15 + 2 = 17 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

C'est-à-dire que les droites $(D1)$ et $(D2)$ ne sont ni parallèles ni confondues, elles sont donc sécantes en un point A.

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection A revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 5y - 35 = 0 (1) \\ \begin{cases} x = 4 - t (2) \\ y = -2 + 3t (3) \end{cases} \end{cases}$$

On remplace x et y dans (1) par leurs expressions respectives dans (2) et (3).

$2x - 5y - 35 = 0$

$2(4 - t) - 5(-2 + 3t) - 35 = 0$

$8 - 2t + 10 - 15t - 35 = 0$

$-17t = 17$

$t = -1$

On remplace t par sa valeur dans (2) et (3).

$x = 4 - t$

$x = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$

$y = -2 + 3t$

$y = -2 + 3(-1) = -2 - 3 = -5$

Donc $(D1)$ et $(D2)$ se coupent en $A(5; -5)$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) des deux droites $(D1)$ et $(D2)$ définies par :

$(D1): \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad$ et $\quad (D2): \begin{cases} x = 1 - 15r \\ y = -1 + 6r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$

Le vecteur $\overrightarrow{u_1}(5; -2)$ est un vecteur directeur de $(D1)$

Le vecteur $\overrightarrow{u_2}(-15; 6)$ est un vecteur directeur de $(D2)$

Calculons le déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

$$dét(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - (-15) \times (-2) = 30 - 30 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires. C'est-à-dire que les droites $(D1)$ et $(D2)$ ne sont pas sécantes. Il reste à savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues.

$A(1; -1)$ est un point de $(D2)$ (pour $r = 0$).
Vérifions si ce point appartient à $(D1)$.
Pour le faire, remplaçons x et y dans la représentation paramétrique de $(D1)$ et calculons la valeur du paramètre t dans chacune des équations du système.

$(D1): \begin{cases} x = -2 + 5t (1) \\ y = 1 - 2t (2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

(1): $1 = -2 + 5t$
$5t = 3$
$t = \frac{3}{5}$

(2): $-1 = 1 - 2t$
$2t = 2$
$t = 1$

Comme on obtient deux valeurs différentes du paramètre t, alors le point $A(1; -1)$ n'est pas un point de $(D1)$.
Par suite, $(D1)$ et $(D2)$ sont strictement parallèles, elles n'ont donc aucun point en commun.

<u>Corrigé de l'application 3.4</u>

Soit la droite $(d): x - 3y + 3 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 5)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (d).

- Nous allons commencer par déterminer l'équation de la droite (AH) perpendiculaire à (d) passant par A.

(AH) et (d) sont perpendiculaires, donc tout vecteur directeur de (d) est normal à (AH).
On a : $(d): x - 3y + 3 = 0$ Donc, le vecteur $\vec{V}(3; 1)$ qui est un vecteur directeur de (d) est aussi un vecteur normal à (AH).
Pour tout point $M(x; y)$ de (AH), on a :

$\vec{V}(3; 1)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 2; y - 5)$ sont orthogonaux. Donc, $\vec{V}.\overrightarrow{AM} = 0$

$$3(x - 2) + (1)(y - 5) = 0$$
$$3x - 6 + y - 5 = 0$$
$$3x + y - 11 = 0$$

Alors, l'équation de la perpendiculaire à (d) passant par A est :

$(AH): 3x + y - 11 = 0$

- Ensuite, nous allons déterminer les coordonnées du point H, intersection des droites (d) et (AH).

  Le point H est sur les deux droites (d) et (AH), donc ses coordonnées vérifient les équations des deux droites. Pour déterminer ces coordonnées, il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 (1) \\ 3x + y - 11 = 0 (2) \end{cases}$$

En multipliant par 3 la deuxième équation, on retrouve le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 (1) \\ 9x + 3y - 33 = 0 (4) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les équations (1) et (4), on retrouve :

$$10x - 30 = 0$$

Alors $x_H = 3$
On remplace x_H par sa valeur 3 dans l'équation de (AH) (mais on peut le faire aussi dans l'équation de (d)) et on obtient :

$$3x_H + y_H - 11 = 0$$
$$3(3) + y_H - 11 = 0$$
$$y_H = 11 - 9 = 2$$

D'où, le projeté orthogonal de A sur (d) est $H(3; 2)$