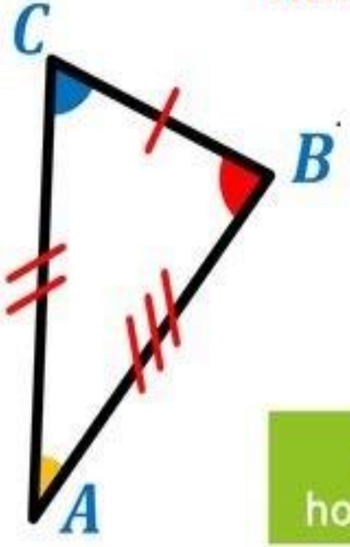
Les triangles superposables

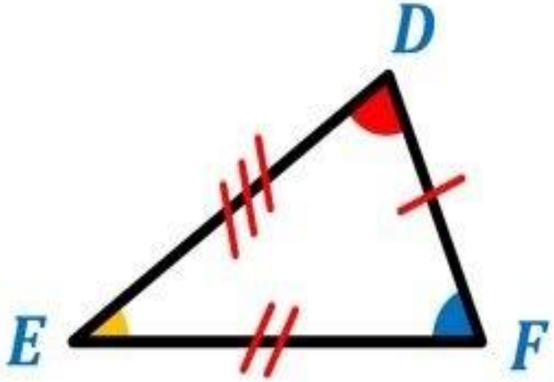
Classe EB7

I. Triangles égaux

Vocabulaire :

Homologue = équivalent



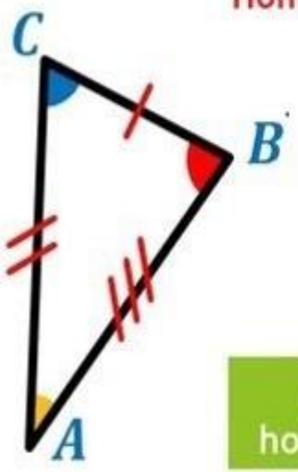


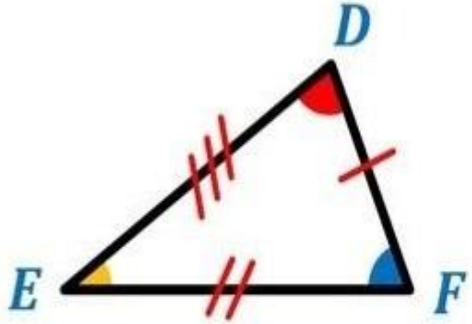
Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{ABC}$ et	A et	DF et
$\widehat{BAC}$ et	B et	ED et
$\widehat{ACB}$ et	C et	EF et

I. Triangles égaux

Vocabulaire :

Homologue = équivalent





Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{EDF}$	A et E	DF et BC
$\widehat{BAC}$ et $\widehat{DEF}$	B et D	ED et AB
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{EFD}$	C et F	EF et AC

Alors les triangles ABC et EDF sont dits superposables ou égaux.

1- Définition

Deux triangles sont dits superposables (ou égaux) lorsque les trois côtés de l'un sont respectivement isométriques aux trois côtés de l'autre et les trois angles de l'un sont repectivement égaux aux trois angles de l'autre.

2- Premier cas de superposition de deux triangles

Activité

1° Trace un segment $[AC]$ de mesure 5 cm. D'un même côté de $[AC]$, trace $\widehat{CAx} = 60°$ et $\widehat{ACy} = 40°$. $[Ax)$ et $[Cy)$ se coupent en L.

Tu as ainsi tracé un triangle LAC connaissant un côté et les deux angles adjacents à ce côté.

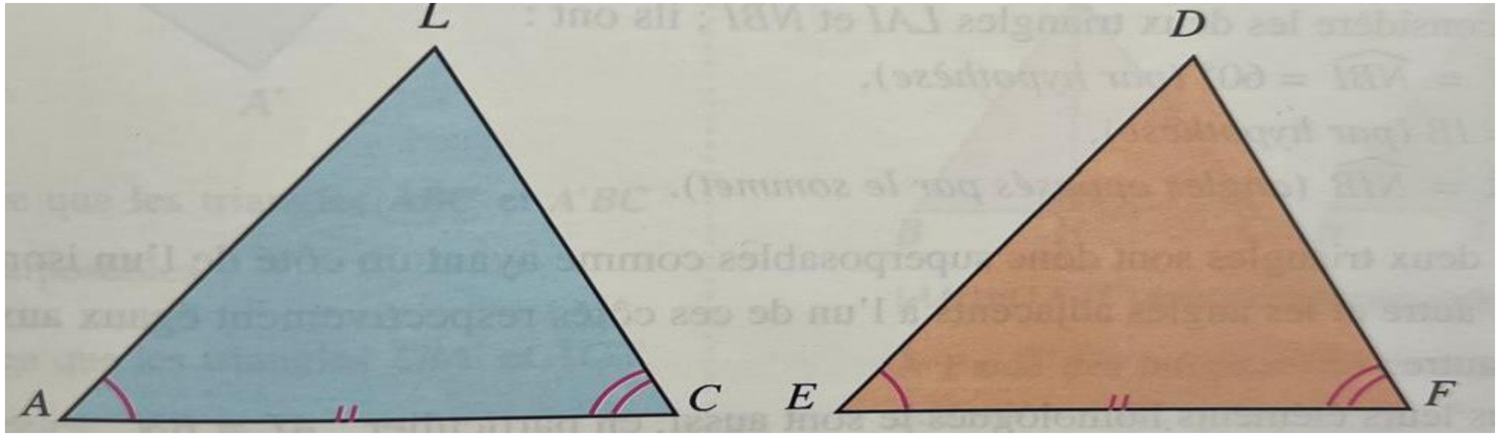
2° Fais de même pour tracer un triangle DEF tel que $EF = 5$ cm, $\widehat{DEF} = 60°$ et $\widehat{DFE} = 40°$.

3° Fais un calque de chacun des triangles LAC et DEF d'une seule manière.

4° Vérifie que ces deux calques sont superposables.

5° Quels sont dans ces deux triangles :

a) les angles égaux ? **b)** les côtés isométriques ?



Les deux triangles LAC et DEF ci-dessus sont tels que:

A (Angle) $\widehat{LAC} = \widehat{DEF}$
C (Côté) AC = EF
A (Angle) $\widehat{LCA} = \widehat{DFE}$

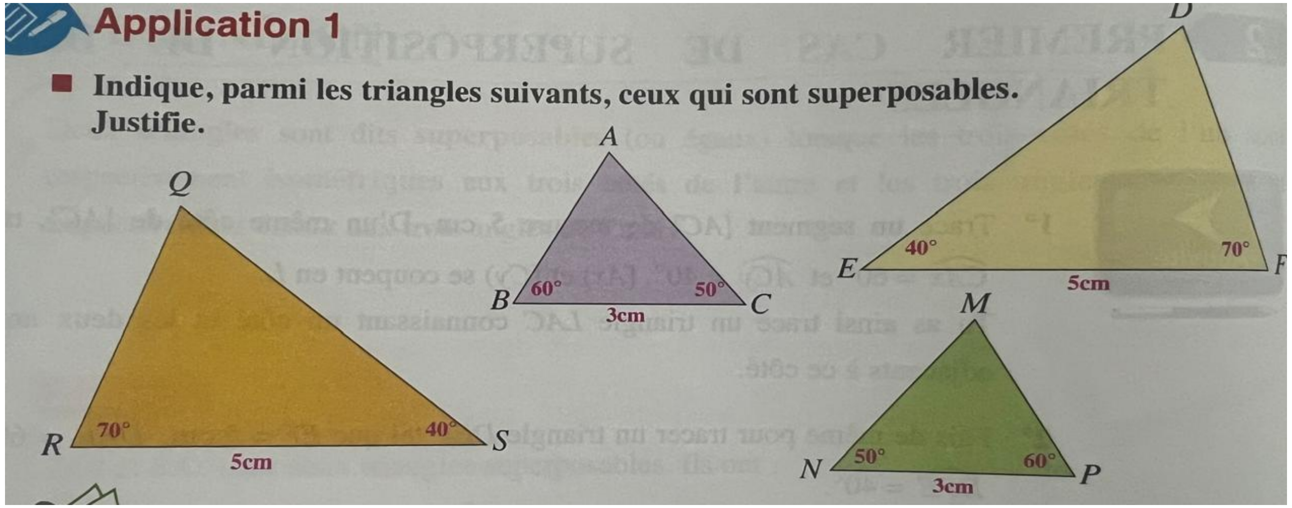
Ils sont alors superposables

Leurs éléments homologues sont:

LA = DE
LC = DF
$\widehat{ALC} = \widehat{EDF}$

Règle (A étudier) (1^{er} cas)

Deux triangles, ayant un côté de l'un isométrique à un côté de l'autre et les angles adjacents à l'un de ces deux côtés repectivement égaux aux angles adjacents à l'autre, sont superposables.



<u>Application</u>

Dans les triangles RQS et FDE, **on a que :**

A (Angle) $\widehat{QRS} = \widehat{DFE} = 70^0$

C **(Côté)** RS = FE = 5cm

A (Angle) $\widehat{DEF} = \widehat{QSR} = 40^0$

Or

Deux triangles, ayant un côté de l'un isométrique à un côté de l'autre et les angles adjacents à l'un de ces deux côtés repectivement égaux aux angles adjacents à l'autre, sont superposables.

Alors RQS et FDE sont superposables.

Leurs éléments homologues sont: RQ = FD ; QS = DE et $\widehat{RQS} = \widehat{FDE}$

3- Deuxième cas de superposition de deux triangles

Activité

1° Trace un angle $\widehat{xEy}$ de mesure 65°; place le point F sur $[Ex)$ et le point G sur $[Ey)$ tels que $EF = 4$ cm et $EG = 7$ cm; relie F à G; mesure $[FG]$.

Tu as ainsi tracé un triangle EFG connaissant un angle et les côtés de cet angle.

Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{FEG}$?

Quel est l'angle opposé au côté $[EF]$? $[EG]$?

2° Fais de même pour tracer un triangle MNP tel que : $MN = 4$ cm, $MP = 7$ cm et $\widehat{NMP} = 65°$.

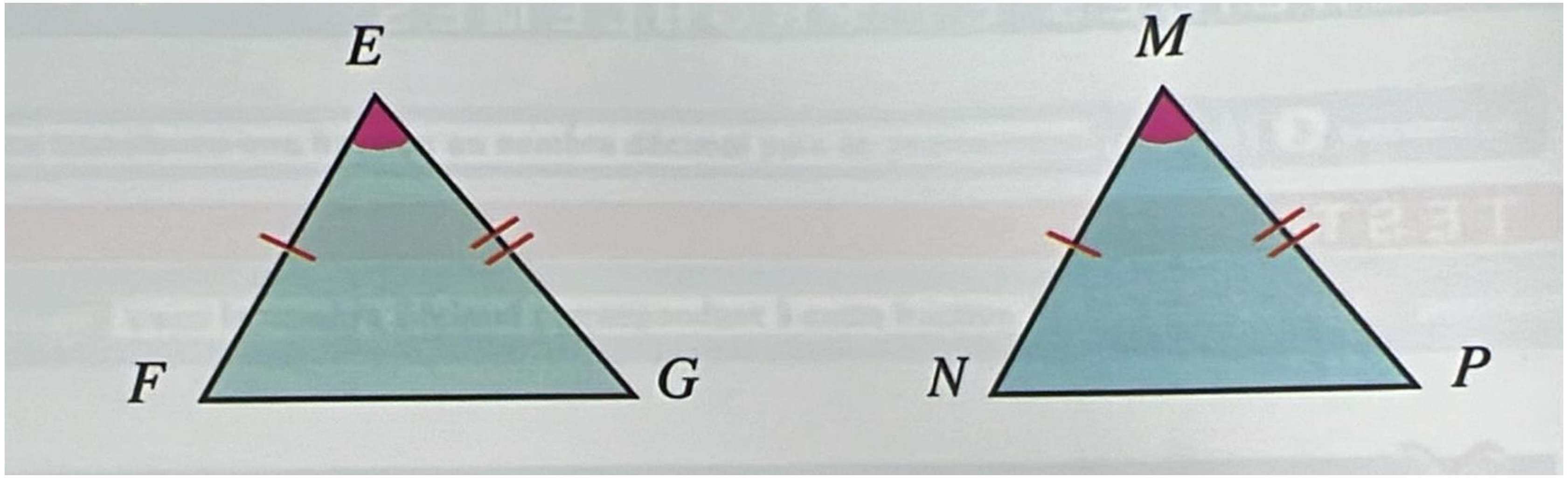
3° Fais un calque de chacun des deux triangles tracés ci-dessus.

4° Vérifie que ces deux calques sont superposables.

5° Quels sont dans ces deux triangles :

a) les angles égaux ?

b) les côtés isométriques ?



Les deux triangles EFG et MNP ci-dessus sont tels que:

C (Côté) EF = MN
A (Angle) $\widehat{FEG} = \widehat{NMP}$
C (Côté) EG = MP

Ils sont alors superposables

Leurs éléments homologues sont:

FG = NP
$\widehat{NPM} = \widehat{FGE}$
$\widehat{PNM} = \widehat{GFE}$

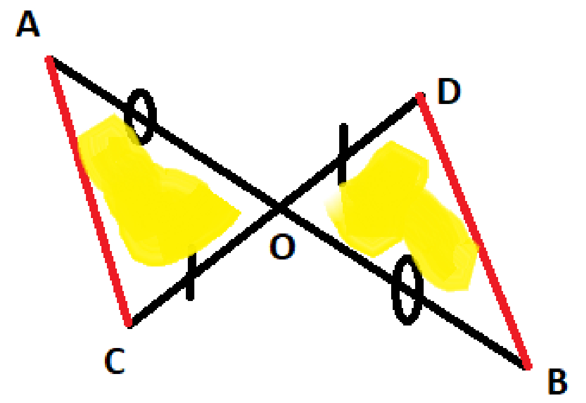
Règle (A étudier) ($2^{ème}$ cas)

Deux triangles, ayant un angle de l'un égal à un angle de l'autre et les côtés de l'un ces deux angles repectivement isométriques aux côtés de l'autre, sont superposables.

<u>Application</u>

[AB] et [CD] sont deux segments qui se coupent en leur milieu O

Démontre que AC = BD



→ Dans les triangles AOC et BOD, on a que:

C OA = 0B

A $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (opposés pas le sommet)

C OC = OD

Or deux triangles, ayant un angle de l'un égal à un angle de l'autre et les côtés de l'un ces deux angles repectivement isométriques aux côtés de l'autre, sont superposables.

Alors AOC et BOD sont superposables

Les éléments homologues sont

$\widehat{DBO} = \widehat{CAO}$

$\widehat{BDO} = \widehat{ACO}$ Et en particulier AC = BD

4- Troisième cas de superposition de deux triangles

- **Activité**

1° Trace un segment $[KL]$ de mesure 7 cm.
D'un même côté de $[KL]$, trace un arc de cercle de centre K et de rayon 6 cm puis un arc de cercle de centre L et de rayon 4 cm. Ces deux arcs se coupent en M.
Tu as ainsi construit un triangle KLM connaissant les mesures de ses trois côtés.

2° Fais de même pour construire un triangle OPQ tel que :
$OP = 7\text{cm}$, $OQ = 6\text{cm}$ et $PQ = 4$ cm.

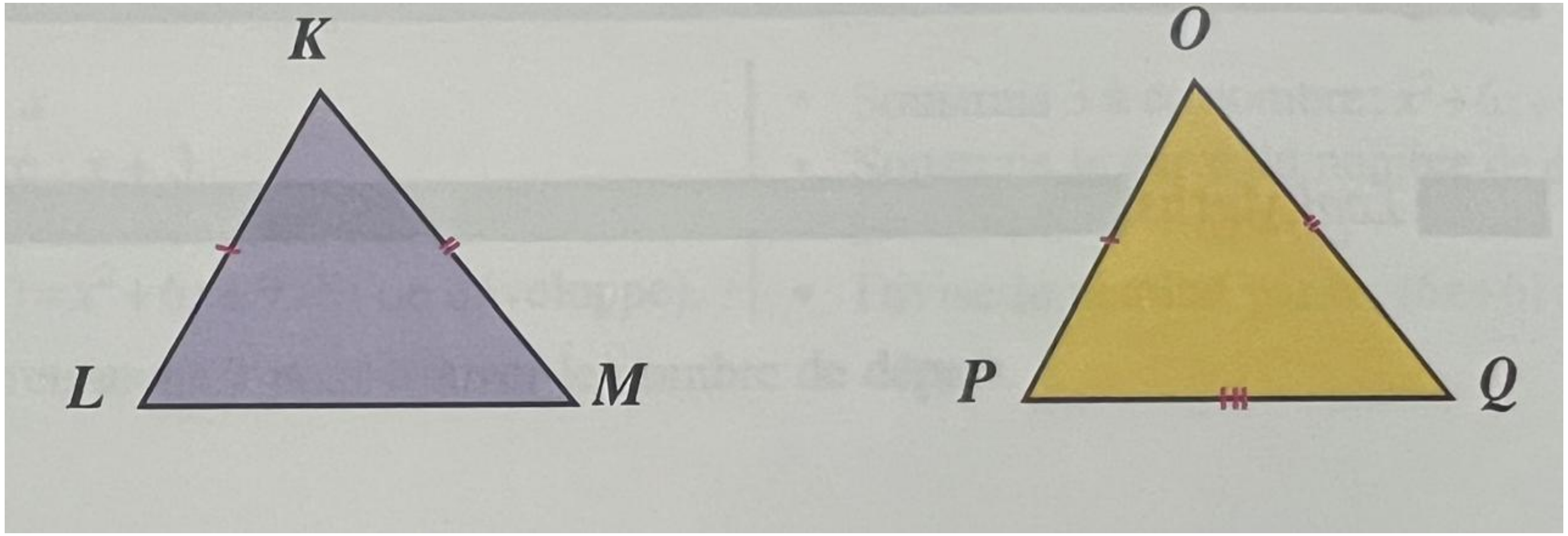
3° Fais le calque de chacun de ces deux triangles.

4° Vérifie que ces deux calques sont superposables.

5° Quels sont dans ces deux triangles :

a) les côtés isométriques ?

b) les angles égaux ?



Les deux triangles KLM et OPQ ci-dessus sont tels que:

C (Côté) KL=OP
C (Côté) KM=OQ
C (Côté) LM=PQ

Ils sont alors superposables

Leurs éléments homologues sont:
$\widehat{LKM} = \widehat{POQ}$
$\widehat{KLM}=\widehat{OPQ}$
$\widehat{OQP}=\widehat{KML}$

Règle (A étudier) ($3^{ème}$ cas)

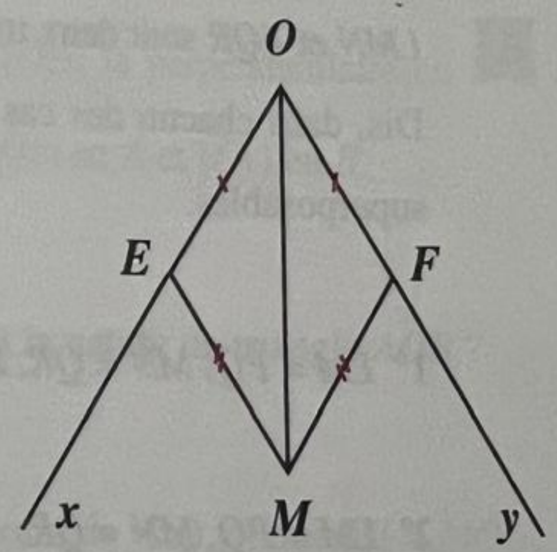
Deux triangles, ayant les trois côtés de l'un respectivement isométriques aux trois côtés de l'autre, sont superposables.

- **Application**

Sur les côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ d'un angle $\widehat{xOy}$, on considère respectivement les points E et F tels que $OE = OF$.

M est un point à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$ tel que : $EM = FM$.

Démontre que $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.



Réponse

Dans les triangles OEM et OFM, on a que :

(C) $OE = OF$ (par donneé)

(C) $EM = FM$ (par donnée)

(C) $[OM]$ côté commun

Or deux triangles, ayant les trois côtés de l'un respectivement isométriques aux trois côtés de l'autre, sont superposables.

Alors, OEM et OFM sont superposables.

Les élements homologues sont :

$E\hat{O}M = F\hat{O}M$ (en particulier)

$O\hat{E}M = O\hat{F}M$

$O\hat{M}E = O\hat{M}F$

par suite $[OM)$ bissectrice de $x\hat{O}y$ car elle le divise en deux angles adjacents et égaux.